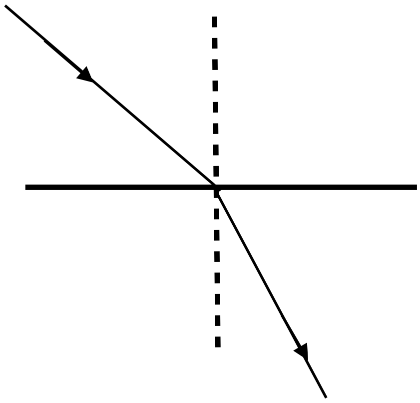
Lentille électrostatique : corrigé:

1. L'application du théorème de l'énergie cinétique fournit : $v = \sqrt{-\frac{2qU}{m}}$

Dans la suite de l'exercice on considèrera des électrons, soit q = -e.

2. Le plan séparant les deux régions est par exemple le plan z = 0.



Le champ électrostatique n'est non nul qu'à la traversée de ce plan (avec le modèle adopté il serait d'ailleurs infini, en réalité il faudrait faire varier le potentiel de manière continue), et perpendiculaire à 0z.
La quantité de mouvement de l'électron selon Ox et Oy est donc conservée.
Pour simplifier on définit Ox dans le plan d'incidence (contenant la vitesse incidente et la normale), on a alors

$$v_{1x} = v_{2x}$$

$$v_1.\sin(i_1) = v_2.\sin(i_2)$$

ou encore

$$\sqrt{U_1}.\sin(i_1) = \sqrt{U_2}.\sin(i_2)$$

Ainsi la trajectoire des électrons se «réfracte» à la traversée de la surface ; si $U_2 > U_1$, on a $i_2 < i_1$.

3. Dans la première partie les électrons sont déviés fortement vers l'axe, dans la seconde partie ils sont légèrement déviés vers la périphérie.

4. On applique le théorème de Gauss à un petit cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur dz.
On a alors :

$$E_z(r,z+dz)\pi r^2 - E_z(r,z)\pi r^2 + E_r(r,z).2\pi r.dz = 0$$

soit

$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z(r,z)}{\partial z}$$

Pour focaliser l'électron, la composante radiale de la force électrique doit être négative :

$$F_r(0,z) = -eE_r(0,z) = \frac{er}{2}\left(\frac{\partial E_z(r,z)}{\partial z}\right)_{r=0} = -\frac{er}{2}\left(\frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial z^2}\right)_{r=0}$$

On doit donc réaliser U'' >0.

5. Le principe fondamental appliqué à l'électron donne en coordonnées cylindriques :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{er}{2}U'' \quad (1)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -e.E_z(0,z) \quad (3)$$

L'équation (2) montre que $C = r^2\dot{\theta}$ se conserve.

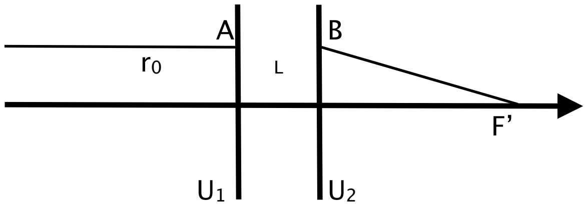
La vitesse initiale étant parallèle à l'axe, on a $\dot{\theta} = 0$

On a de plus $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dz}.v\right) = v.\frac{d}{dz}\left(v.\frac{dr}{dz}\right)$ en considérant v ~ v_z.

et $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

L'équation (1) s'écrit alors : $\sqrt{U}.\frac{d}{dz}\left(\sqrt{U}.\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{rU''}{4}$

6.



On intégre l'équation précédente entre A et B, séparés d'une distance L.

$$\int_A^B d\left(\sqrt{U}.\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{1}{4}\int_A^B \frac{r.U''}{\sqrt{U}}.dz$$

avec

$$\int_A^B d\left(\sqrt{U}\frac{dr}{dz}\right) = \left(\sqrt{U}\frac{dr}{dz}\right)_B \approx \sqrt{U_2}.\frac{r_0}{f'}$$

et

$$-\frac{1}{4}\int_{-L}^{L} \frac{r.U''}{\sqrt{U}}.dz \approx -\frac{1}{4}\int_{-L}^{L} \frac{r_0.U''}{\sqrt{U}}.dz$$

On a alors :

$$\frac{1}{f'} \approx -\frac{1}{4\sqrt{U_2}}\int_{-L}^{L} \frac{U''}{\sqrt{U}}.dz$$

Remarque : exercice difficile (X) ; les deux dernières questions sont difficiles, mais c'est un exercice d'ORAL, et vous serez aidés pour les passages «techniques» ou les approximations. Vous devez être autonomes sur les premières questions.