# CONDUCTION – EXERCICES

Dans tous les exercices suivants $\lambda$ désigne une conductivité thermique, $\rho$ une masse volumique et C une chaleur massique.

## 1. Isolation thermique ( CCP PC 97 )

Le mur extérieur d'une maison est constitué de briques. Il est sans ouverture et mesure 6 mètres de hauteur, 10 mètres de longueur et 20 centimètres d'épaisseur.

a) La conductivité thermique de la brique est $\lambda = 0,67\ W.m^{-1}.K^{-1}$ . Calculer la résistance thermique du mur et le flux thermique lorsque la température extérieure est de 0 °C, celle de la maison étant maintenue à 20°C.

b) Pour diminuer les déperditions thermiques on isole le mur par 45 millimètres de polystyrène de conductivité thermique $\lambda' = 0,029$ W.m-1. K-1. Calculer le nouveau flux thermique.

c) Quel serait ce flux thermique, si le mur était constitué de deux parois en brique, de 8 centimètres d'épaisseur chacune, séparées par une couche d'air de 4 centimètres ? La conductivité thermique de l'air est $\lambda air = 0,025$ W. m-1. K-1. Conclusion.

## 2.Barreau constitué de deux métaux

On dispose d'un barreau cylindrique de section S constitué d'une longueur $l_1$ d'aluminium et $l_2$ de cuivre.


On donne :

$\lambda$ (Al ) = 200 $W.K^{-1}.m^{-1}$ ; $\lambda$ ( Cu ) = 380 $W.K^{-1}.m^{-1}$ ; $l_1$ = 80 cm ; $l_2$ = 50 cm ; S = 2 $cm^2$.

L'extrémité libre du barreau d'aluminium est maintenue à $t_1$ = 180°C, celle du barreau de cuivre à $t_2$ = 0°C. Une gaine isole latéralement le barreau.

Déterminer, en régime stationnaire :

a) la température au niveau de la soudure ;

b) le gradient de température le long de chacune des deux parties du barreau ;

c) la densité de flux de chaleur et la quantité de chaleur qui traverse la jonction chaque minute.

d) La résistance thermique de l'ensemble.

*Réponses :* $T_{soudure}$ *= 44,5 °C ; Q = 405,6 J.*

## 3.Variation de température de la surface terrestre :

On considère un milieu semi-infini ( x > 0 ) dont la surface est soumise à une variation de température :

$$T(0,t) = T_0 + ( T_1 - T_0 ) \cos(\omega t)$$

La diffusivité de ce milieu est $h = \lambda / \rho C$, supposée constante.

a) Que représentent $T_0$ et $\Delta T = T_1 - T_0$ ?

b) Ecrire l'équation de la chaleur à une dimension, en utilisant la variable $\vartheta(x,t) = T(x,t) - T_0$.

c) On cherche une solution permanente dont la forme complexe est :

$$\underline{\vartheta}(x,t) = \underline{f}(x).\exp(j\omega t)$$

Donner l'expression de T(x,t) ,déterminer les constantes d'intégration par application des conditions aux limites et tracer son allure.

d) Calculer $\delta$, profondeur pour laquelle l'amplitude de $\vartheta(x,t)$ est divisée par e.

e) Application : pour le sol terrestre $\rho = 3.01^3\ kg.m^{-3}$ ; $C = 515\ J.kg^{-1}K^{-1}$ ; $\lambda = 1,0\ W.m^{-1}.K^{-1}$. Calculer $\delta$ pour les variations journalières et annuelles de température à la surface de la Terre.

f) Vers quelle date la température est minimale à une profondeur de 2 mètre en supposant que la température au sol est minimale au 1er février ?

## 4. Isolation d'un tuyau cylindrique

On considère deux tubes coaxiaux de rayons $R_1$ et $R_2 > R_1$, séparés par un matériau homogène de conductivité thermique $\lambda$ uniforme.

Le cylindre de rayon $R_1$ est maintenu à la température $T_1$, le cylindre de rayon $R_2$ à la température $T_2$.

a) En effectuant un bilan énergétique pour un cylindre de hauteur dz entre les rayons r et r+dr, montrer que l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\rho C}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

En déduire la loi T(r) en régime permanent.

b) Calculer la puissance moyenne dissipée par mètre de tube en RP avec :

$T_1$= 350 K ; $T_2$= 500 K ; $\lambda$ = 30 W.K$^{-1}$.m$^{-1}$ ; $R_1$= 10cm ; $R_2$=15 cm.

*Réponses : T(r) = A.Lnr + B ; P = - 69,7 kW.*

## 5. Barre conductrice :

Un barreau cylindrique de conducteur ohmique, de longueur L, de conductivité électrique $\sigma$, de conductivité thermique $\lambda$, est parcouru par un courant électrique de densité volumique $\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$.

Les extrémités du barreau sont maintenues à $T_1$ et $T_2$.

Une gaine isole latéralement le barreau.

a) Déterminer, en régime stationnaire, la loi de distribution de la température dans le barreau.
b) A quelle condition, portant sur $T_1$ et $T_2$, T(x) admet-elle un maximum ?

## 6. Transfert thermique entre deux sphères

On considère deux sphères concentriques de rayons $R_1$ et $R_2 > R_1$, maintenues à des températures constantes $T_1$ et $T_2$.

Le milieu solide qui les sépare est homogène isotrope et présente une conductivité thermique $\lambda$ indépendante de la température.

a) Calculer la puissance thermique dissipée en régime stationnaire.
b) Quelle est la résistance thermique du système ?

*Réponses : $R_{th}= ( R_2-R_1) / 4\pi\lambda R_1R_2$.*

## 7. Evacuation de la chaleur dans un barreau d'uranium

Un barreau cylindrique a un diamètre $D_2$ = 29 mm .

Les réactions nucléaires qui s'y produisent dégagent une puissance volumique p.

La conductivité thermique de l'uranium est $\lambda$ = 27 W.K$^{-1}$.m$^{-1}$.

a) Déterminer en régime stationnaire la répartition de température dans le barreau. A la périphérie la température vaut $T_e$ = 200°C. Que vaut $T_{max}$ ?
b) L'uranium fond à $T_f$ = 1232 °C. Déterminer la puissance volumique maximale que l'on peut extraire du barreau si l'on ne veut pas dépasser cette température.

## 8.Barre non isolée latéralement ( ENSI)

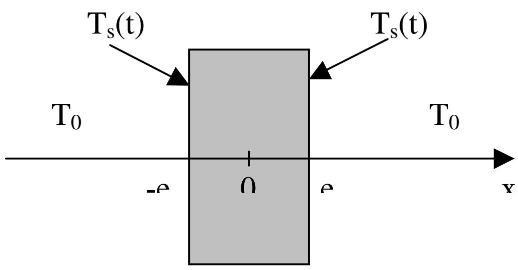
Une barre cylindrique, de rayon R et de longueur L, est constituée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda$.

Les températures des deux extrémités sont $T_1$ et $T_2$.

La barre évacue de la chaleur par sa surface latérale à raison d'une quantité h ( T - $T_f$ ) par unité de temps et de surface.

Déterminer la répartition de température de la barre en régime stationnaire..

## 9.Chauffage par micro-ondes ( d'après Mines-Ponts PC 05 )




Un échantillon de matériau aqueux, de conductivité thermique $K$, capacité thermique massique $c$ et masse volumique $\rho$ est placé dans un four à micro-ondes.
Cet échantillon est parallélépipédique, d'aire $S$ et d'épaisseur $2e$.
On admet que le problème reste unidimensionnel.
La température du milieu extérieur, $T_0$, est constante.
La température d'interface est notée $T_s(t) = T(-e,t) = T(e,t)$.
Les échanges thermiques au niveau des interfaces sont modélisés par la loi $\Phi_s = gS[T_s(t) - T_0] = j_{Th}S$, qui exprime la puissance sortant du matériau en faisant intervenir le flux thermique, de grandeur $j_{Th}$, et le coefficient d'échange thermique $g$.
On note $P$ la puissance moyenne (constante) fournie au matériau par le champ électromagnétique.

**1** – Donner l'équation aux dérivées partielles relative au profil de température $T(x,t)$. Donner l'expression des flux thermiques aux limites, $j_{Th}(-e,t)$ et $j_{Th}(e,t)$, en fonction de $g$ et de $T_s(t) - T_0$.
**2** – Déterminer l'expression et tracer l'allure du graphe de $T_P(x)$, profil de température dans l'échantillon en régime permanent, en fonction de $T_p(e)$, $x$ et des paramètres pertinents du système.
Établir les relations :

$$T_P(0) = T_0 + \frac{P}{2Sg}\left(1 + \frac{ge}{2K}\right) = T_p(e) + \frac{Pe}{4SK}.$$

**3** – La température initiale étant, en tout point, $T_0$, on cherche les conditions sous lesquelles l'équation aux dérivées partielles établie à la question 1 admet une solution de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + [T_p(x) - T_0] \times [1 - f(t)].$$

Déterminer a priori $f(0)$ et $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
**4** –Montrer que l'on peut considérer $T_p(x)$ = cte = $T_p(e)$ si $ge << 2K$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par *f(t)* ? Quelle est la constante de temps, notée $t_S$, de la fonction *f(t)* ainsi trouvée ? Donner la solution de cette équation.
**5** – Calculer $t_S$ et $T_P(0)$ pour $\rho c = 4\times10^6$ J.m$^{-3}$.K$^{-1}$, $e = 5\times10^{-3}$ m, $S = 10^{-2}$ m$^2$, $g = 10$ W.K$^{-1}$.m$^{-2}$, $K = 0{,}5$ W.K$^{-1}$.m$^{-1}$, $P = 500$ W et $T_0 = 293$ K.

## 10. Fabrication de neige artificielle ( CCP PC 01 )

*La neige artificielle est obtenue en pulvérisant, à l'aide de canons à neige, de fines gouttes d'eau liquide à $T_i$=10°C dans l'air ambiant à la température $T_e$=-15°C. On propose de calculer le temps mis par une goutte d'eau pour passer de l'état liquide à l'état solide. On suppose que la goutte d'eau est sphérique de rayon R=0,2mm et que sa température à tout instant est uniforme. A l'interface eau-air, le flux thermique $d\Phi$ à travers une surface dS dans le sens de la normale extérieure $\vec{n}$ est donnée par la loi des transferts convecto-diffusifs*

$$d\Phi = h\,[T(t) - T_e]\,dS$$

*où T(t) est la température de la goutte, supposée uniforme, à l'instant t. h est une constante que l'on prendra égale à h = 65 W. m$^{-2}$ K$^{-1}$.*

a) En utilisant le premier principe de la thermodynamique, en supposant la goutte indéformable, en équilibre mécanique avec le milieu ambiant, établir que l'équation qui régit la variation temporelle de la température *T(t)* de la goutte d'eau liquide est

$$\rho c_l R\frac{dT}{dt} = -3h[T(t) - T_e]$$

où $c_l$ est la capacité thermique massique de l'eau liquide et $\rho$ sa masse volumique supposée constante.
b) Montrer que la variation temporelle de la température de la goutte liquide est régie par

$$\frac{T(t)-T_e}{T_i-T_e}=e^{-t/\tau}$$

Exprimer $\tau$ en fonction de $h$, $\rho$, $c_l$ et $R$. Calculer le temps $t_o$ mis par la goutte d'eau liquide pour atteindre la température de surfusion $T(to) = -5°C$.

c) Lorsque la goutte atteint la température de -5°C, il y a rupture de la surfusion : la température est alors égale à 0°C et la goutte est partiellement solidifiée. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion. On admettra pour cela la transformation adiabatique car très rapide. On néglige également la variation de volume due au changement de masse volumique.

d) Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

e) A son arrivée au sol, le rayon de la goutte solide est inférieur à celui de la goutte liquide injectée par le canon à neige (on néglige la variation de masse volumique avec la température) : la glace s'est sublimée. Quel est le mécanisme physique responsable de cette sublimation ?

Données thermodynamiques de l'eau

Chaleur latente de changement de phase solide-liquide ($P = 10^5$ Pa) : $L_f$ (273K) = 333 kJ.kg$^{-1}$

Capacité thermique massique (à 0°C) : de l'eau liquide : $c_l$= 4,18 kJ.kg$^{-1}$.K$^{-1}$ ; de l'eau solide : $c_s$= 2,1 kJ.kg$^{-1}$.K$^{-1}$

## 11.Ebullition de l'eau en convection forcée ( CCP PC 04 ) :

On considère un tube cylindrique de rayon intérieur $r_1$ et de rayon extérieur $r_2$, infiniment long, de conductivité thermique $\lambda$ en régime stationnaire.

Les conditions thermiques sont telles que $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$.

On admet que le tube est parfaitement isolé sur sa partie extérieure en $r = r_2$.

Le tube de résistivité électrique $\xi_{elec}$ est parcouru par un courant d'intensité I constante.

1. Calculer $p_J$, puissance Joule dissipée par unité de longueur de tube.

La puissance Joule sert à réchauffer de l'eau qui s'écoule dans le tube avec un débit volumique q.

Soit $T_{eau}(x)$ la température de l'eau que l'on supposera fonction uniquement de la position x le long de l'axe de la canalisation. L'origine est prise dans la section d'entrée de l'eau dans le tube.

La pression est constante et égale à la pression atmosphérique $P_{atm}$.

2. Montrer que la température de l'eau obéit à l'équation suivante :

$$\rho_{eau}c_{eau}q\frac{dT_{eau}(x)}{dx}=\frac{\xi_{elec}I^2}{\pi(r_2^2-r_1^2)}$$

où $\rho_{eau}$ est la masse volumique de l'eau et $c_{eau}$ sa chaleur massique, supposées constantes.

3. Avec $T_0 = T_{eau}(x=0) = 293$ K, calculer la position dans le tube $x_c$ telle que $T_{eau} = 393$ K.

On donne : $q = 3{,}92.10^{-6}$ m$^3$.s$^{-1}$ : $\xi_{elec}$ = 1350 µΩ.cm ; I = 40 A ; $\rho_{eau} = 10^3$ kg.m$^{-3}$ ;
$c_{eau} = 4{,}18.10^3$ J.K$^{-1}$.kg$^{-1}$ ; $r_1$ = 5 mm ; $r_2$ = 5,5 mm.

Que se passe-t-il pour $x > x_c$ ?

4. Soit $L_v$ = 2250 kJ.kg$^{-1}$ l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à $P_{atm}$. Calculer la longueur de tube d nécessaire pour obtenir de la vapeur.
5. Tracer l'allure du profil de température $T_{eau}(x)$ de l'eau dans un tube de longueur totale L = 20 m.

En fait , la longueur réelle de tube nécessaire pour obtenir de la vapeur est supérieure à celle calculée ci-dessus. Pourquoi ?

Donnée : en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}(T)=\frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z$