

Un fluide est en **équilibre** par rapport à un référentiel R si pour toute particule fluide :

$$\vec{R}(M,t) = 0.$$

Soit une portion de fluide dV de masse $dm = \rho \cdot dV$ enclose par une surface S et soumise dans un référentiel R :

* à des forces de pression admettant une densité $f_{\text{pression}} = -\nabla P$;

* à des forces volumiques admettant une densité f_V .

L'équilibre dans R s'écrit sous forme locale :

$$f_V - \nabla P = \vec{0}$$

Remarque : si R n'est pas galiléen, il faut tenir compte de forces d'inertie.

Cas particulier d'un fluide soumis aux seules forces de pesanteur : $f_V = \rho \vec{g}$.

Définition : on appelle surfaces **isobares** les surfaces $P = \text{cte}$.

Propriété : les isobares sont perpendiculaires aux lignes de champ de f_V .

4. Champ de pression dans le champ de pesanteur pour un fluide incompressible :

Un fluide est **incompressible** si ρ ne dépend pas de P .

Si de plus le fluide est homogène, alors $\rho = \text{cte}$.

On a alors :

$$P(z) = P(0) - \rho g z \quad (\text{si l'axe des } z \text{ est ascendant})$$

Théorème de Pascal : dans un liquide au repos, les variations de pression se transmettent intégralement d'un point à un autre.

5. Champ de pression dans un gaz parfait : modèle de l'atmosphère isotherme :

L'équation d'état du GP s'écrit : $P = \rho R T / M$.

On déduit de la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$P(z) = P(0) \cdot \exp(-Mgz / RT).$$

6. Théorème d'Archimède :

Enoncé : Un solide immergé dans un fluide à l'équilibre est soumis à une poussée verticale de bas en haut, égale en norme au poids du liquide déplacé et s'exerçant au centre de masse du fluide déplacé.

Remarque 1 : la poussée d'Archimède n'est pas un nouveau type de force ! Elle traduit la résultante des forces de pression.

Remarque 2 : la démonstration du théorème suppose que le solide peut être remplacé par du fluide sans modifier l'équilibre. Pensez-y !

2.Débits :

Définition : le débit volumique D_v est le volume traversant une certaine surface **orientée** pendant l'unité de temps. Unité : $m^3.s^{-1}$.

Soit un écoulement parcouru par un fluide à vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$:

le volume élémentaire traversant une petite surface $d\vec{S}$ pendant dt est :

$$d^2V = \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

Le volume traversant une surface S pendant dt est donc $dV = \iint \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \cdot dt = (\iint \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}) \cdot dt$.

Le débit massique s'écrit donc :

$$D_v = \frac{dV(t)}{dt} = \iint \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

C'est le **flux** de $\vec{v}(\vec{r}, t)$ à travers la surface S .

Définition : le débit de masse D_m est la masse traversant une certaine surface orientée pendant l'unité de temps. Unité : $kg.s^{-1}$.

Avec un raisonnement analogue au précédent on a :

$$D_m = \frac{dM(t)}{dt} = \iint \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

Définition : le vecteur $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$ est appelé densité de courant de masse.

Généralisation (HP) : le débit d'une grandeur $G(t)$ quelconque – scalaire ou vectorielle - est égale au flux du vecteur $\vec{j}_G(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$ où $g(\vec{r}, t) = \frac{dG(t)}{dt}$ est la densité volumique de $G(t)$.

4. Dérivée particulaire d'un champ.

4.1. Dérivée particulaire du champ des vitesses : champ des accélérations :

En description eulérienne la relation $a = dv/dt$ n'a plus de sens, car ni x , ni y ni z ne dépendent de t . On peut de plus avoir une accélération non nulle alors que l'écoulement est stationnaire.

Revenons à une particule dans un écoulement : entre les instants t et $t + dt$, elle se déplace du point $M(x, y, z)$ au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ avec naturellement :

$$dx = v_x dt ; dy = v_y dt ; dz = v_z dt .$$

Son accélération au temps t est en description eulérienne notée Dv/Dt ; elle s'écrit :

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt} \right]$$

$$\vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t) = d\vec{v}(x, y, z, t)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} . dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} . dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} . dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} . dt$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} . v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} . v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} . v_z dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} . dt$$

$$= (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) . \vec{v} . dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} . dt$$

On a donc

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) . \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

L'opérateur D/Dt est appelée **dérivée particulaire** (ou en suivant le mouvement) ; le premier terme est la **dérivée convective**, due au fait qu'on regarde l'effet d'un changement de point à t donné, le second terme est la **dérivée locale** : on regarde en un même point la variation temporelle.

Ici : accélération particulaire = accélération convective + accélération locale.

Remarque : $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) . \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$

Exemple : tuyère convergente en régime permanent.



INCO~185.MOV

4.2. Dérivée particulaire du champ de masse volumique :

$$\frac{D\rho}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) . \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

4.3. Généralisation :

L'opérateur dérivée particulaire est : $\frac{D}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) + \frac{\partial}{\partial t}$

5.4. Écoulement tourbillonnaire : vecteur tourbillon :

Dans le cas d'un écoulement rotationnel $\vec{\text{rot}} \vec{v} \neq \vec{0}$.

L'écoulement est alors dit tourbillonnaire et on définit le vecteur tourbillon par :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v}$$



WING~2AC.MOV

6. Etude de deux écoulements : signification de la divergence et du rotationnel :



MONDIV~1.LNK

$$6.1. \vec{v} = \frac{x}{\tau} \vec{u}_x + \frac{y}{\tau} \vec{u}_y$$

$$6.2. \vec{v} = \frac{-y}{\tau} \vec{u}_x + \frac{x}{\tau} \vec{u}_y$$

$$\vec{\sigma} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_x$$

La constante de proportionnalité est appelée **viscosité dynamique** ; dans les fluides **newtoniens**, c'est une constante caractéristique du fluide.

Son unité SI est le **Poiseuille (Pl)** ; 1 Pl = 1 Pa.s.

Ordre de grandeur à 20°C : eau $\eta = 10^{-3}$ Pl ; air (P = 1 bar) $\eta = 2.10^{-5}$ Pl ; glycérine $\eta = 0,85$ Pl.

1.4. Conditions de continuité :

La contrainte de viscosité devant rester finie, la vitesse est une fonction continue des variables d'espace. En conséquence, à la surface fixe d'un solide on doit avoir $v = 0$.

A la surface libre d'un fluide, on doit avoir $\sigma_s = 0$.

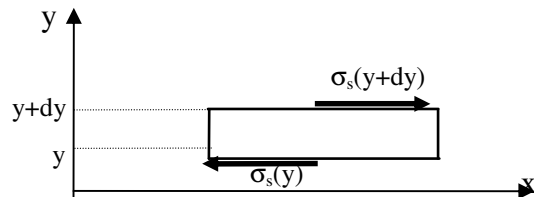
1.5. Force volumique de viscosité pour un fluide incompressible :

Soit un élément de fluide de volume $dV = dx.dy.dz$ entre les abscisses y et $y + dy$, dans un écoulement unidirectionnel

$$\vec{v} = v(y,t) \cdot \vec{u}_x$$

Cet élément est soumis à deux forces de cisaillement :

- en y : où $dS = dx.dz$;
- en $y+dy$: $dF(y+dy) = \eta.dS \cdot \frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y} (y+dy)$.



La résultante est donc $dF = F(y) + F(y+dy)$

$$= \eta.dS \cdot \left[\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y} (y+dy) - \frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y} (y) \right]$$

Il existe donc une densité volumique :

On admettra que pour un écoulement incompressible ($\text{div} v = 0$), on généralise à trois dimensions par :

$$\vec{f}_{V_{\text{Viscosité}}} = \eta \cdot \Delta \vec{v}$$

avec $\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = (\Delta v_x) \vec{u}_x + (\Delta v_y) \vec{u}_y + (\Delta v_z) \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes.

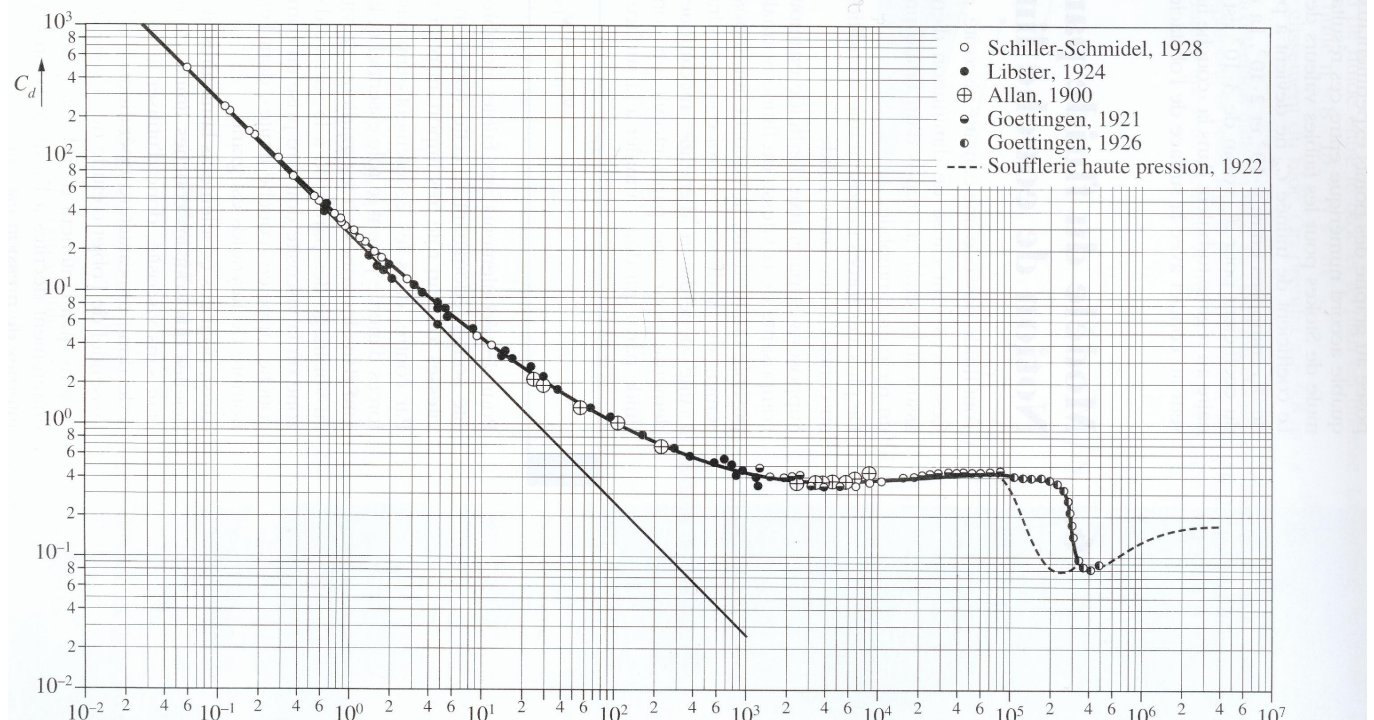
Ordres de grandeur :

Manteau terrestre	10^{-20}
Glacier	10^{-11}
Spermatozoïdes dans le liquide séminal	10^{-3}
Bille dans du miel	10^{-2}
Têtard	100
Homme dans l'eau	10^5
Requin dans l'eau	10^8

Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, l'inertie domine.

Dans un écoulement à petit nombre de Reynolds, la viscosité domine.

On étudie alors $C_d = f(Re)$ dans un diagramme logarithmique.



Pour des petits nombres de Reynolds ($Re < \approx 1$), C_d est inversement proportionnel à Re , soit :

$$C_d = 24 / Re,$$

La force exercée par le fluide sur la sphère est alors : $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{V}$ (formule de Stokes)

- Pour de plus grands nombres de Reynolds, $10^3 \leq Re \leq 10^5$, C_d est constant, ce qui traduit le fait que la traînée se stabilise.

On a alors :

$$F = - C \pi \rho R^2 V^2 u_x \text{ avec } C \approx 0,2.$$

- Pour $Re \approx 2 \cdot 10^5$, la traînée chute brutalement (crise de traînée) .



ball_05.mov



ball_01.mov



ball_03.mov



ball_06.mov



1_061~35.MOV



1_061~35.MOV

3.2.Ecoulements laminaires et turbulents :

4.DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

On considère des écoulements parfaits, incompressibles et homogènes ; on a alors $\rho = \text{cte}$.

1 . Equation d'Euler.

On rappelle qu'un écoulement parfait exclut les phénomènes dissipatifs : viscosité, diffusion thermique, diffusion de particules, etc. Le terme de viscosité disparaît ; l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \vec{f}_v - \vec{\nabla} P \quad \text{Equation d'Euler}$$

On rappelle que : $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$

Cas particulier (écoulements subsoniques) :

si τ désigne un ordre de grandeur temporel des variations de v ,

si L désigne un ordre de grandeur spatial des variations de v ,

l'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale si $v \ll L/\tau$; l'équation est alors linéaire.

2. Equations de Bernouilli.

2.1.Cas particulier d'un écoulement parfait, incompressible, homogène, irrotationnel et stationnaire dans le seul champ de pesanteur :

Les hypothèses se traduisent par : $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$; $\eta = 0$; $\rho = \text{cte}$; $\partial/\partial t = 0$.

La quantité $P + \rho g z + \rho v^2/2 = \text{constante}$ dans tout le fluide.

Remarque : la quantité $\rho g z$ est appelée pression statique; ρv^2 est appelée pression cinétique.

2.2. Cas particulier d'un écoulement parfait, homogène, incompressible, rotationnel et stationnaire dans le champ de pesanteur :

Les hypothèses se traduisent par : $\vec{\text{rot}} \vec{v} \neq \vec{0}$; $\rho = \text{cte}$; $\partial/\partial t = 0$; $\eta = 0$.

La quantité $P + \rho g z + \rho v^2/2 = \text{constante}$ le long d'une ligne de courant.

2.3. Cas général d'un l'écoulement parfait, homogène et incompressible :

Entre deux points A et B d'une même ligne de courant :

$$\int_A^B \left[\frac{dP}{\rho} + d\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + de_p \right] = 0$$

où e_p est l'énergie potentielle volumique.

5. BILANS DYNAMIQUES

Il est difficile en général de résoudre exactement un problème de mécanique des fluides (parfaits ou non) avec les équations locales.

Il est possible d'envisager ces problèmes en isolant cette fois un système macroscopique du fluide (au lieu de la particule fluide) et en utilisant des équations intégrales.

Ce chapitre va montrer au travers d'exemples, un savoir-faire, une méthode pour effectuer des bilans. Aucun résultat n'est a priori à mémoriser.

1. Modes de bilan en mécanique des fluides :

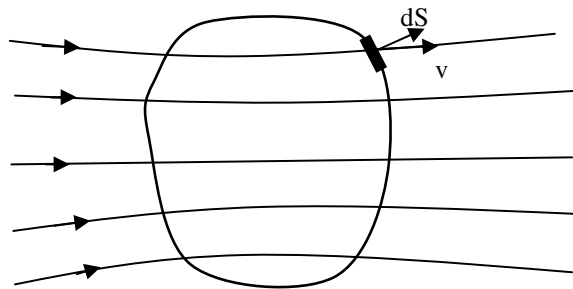
Il existe deux modes de bilan en mécanique des fluides :

- on peut raisonner sur un **système fermé** : il contient une quantité définie de matière dont la frontière est définie et que l'on suit dans son mouvement ;
- on peut raisonner sur un **système ouvert** : il est limité par une surface fictive, fixe dans le référentiel R d'étude, et à travers laquelle il y a échange de matière.

Nous allons montrer ces deux modes de bilan sur le plus fréquent des bilans : le bilan de masse.

1.1. Système ouvert :

Soit une surface S fixe dans R, entourant un volume V.



La masse contenue dans le volume V à l'instant t est :

$$M(t) = \iiint_V \rho(r,t).dV$$

et à l'instant t+ dt :

$$M(t+dt) = \iiint_V \rho(r,t+dt).dV$$

Entre les instants t et t+ dt, la masse contenue dans V a donc varié de :

$$\begin{aligned} dM &= M(t+dt) - M(t) = dM/dt \cdot dt \quad \text{car } M \text{ ne dépend que de } t \\ &= \iiint_V [\rho(r,t+dt) - \rho(r,t)] \cdot dV \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} \right] \cdot dt \cdot dV \quad \text{car } \rho \text{ dépend de } r \text{ et de } t. \end{aligned}$$

La masse d^2m algébrique traversant une petite surface dS orientée par n pendant dt , et ce à vitesse v est :

$$d^2m = \rho \cdot v \cdot dS \cdot dt$$

La masse dm traversant la surface totale S pendant dt est donc :

$$dm = \iint_S d^2m = \iint_S \rho \cdot v \cdot dS \cdot dt.$$

Or on a naturellement : $dm = -dM$; on en déduit :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} \right] \cdot dV + \iint_S \rho \cdot v \cdot dS = 0$$

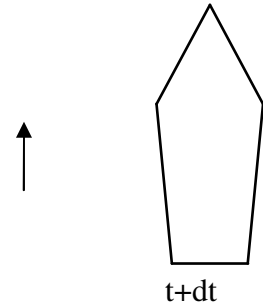
Equation de conservation de la masse sous forme intégrale.

2. Exemple : Bilan de quantité de mouvement : fusée.

Hypothèses :

- Les gaz brûlés sont éjectés avec un débit de masse constant Dm .
- La vitesse des gaz brûlés par rapport à la fusée est u .

On considère le système **fermé** { fusée + gaz } à un instant t .
La masse du système est $M(t)$.



A l'instant t :

la vitesse du système par rapport à un référentiel R galiléen est $V(t)$, vitesse de la fusée.

La quantité de mouvement $P(t)$ du système est :

$$P(t) = M(t)V(t) .$$

A l'instant $t + dt$:

Une masse de gaz $dm = Dm.dt$ a été éjectée : on décompose donc le système de masse $M(t+dt) = M(t)$ en deux sous-systèmes :

- la fusée de masse $m_{\text{fusée}}(t+dt) = M(t) - Dm.dt$, de vitesse $V(t+dt) = V(t) + dV$;
- les gaz éjectés de masse $Dm.dt$, de vitesse $u + V(t+dt)$ par rapport à R .

La quantité de mouvement du système $P(t+dt)$ à $t+dt$ est donc :

$$\begin{aligned} P(t+dt) &= [(M(t) - Dm.dt) . V(t+dt)] + Dm.dt [u + V(t+dt)] \\ &= M(t) . V(t+dt) + Dm.dt . u \end{aligned}$$

On a donc :

$$dP = P(t+dt) - P(t) = M(t).dV + Dm.u.dt$$

donc :

$$dP/dt = M(t).dV/dt + Dm.u$$

Le Principe fondamental appliqué au système considéré s'écrit donc :

$$dP/dt = F$$

$$M(t).dV/dt + Dm.u = F$$

Le terme $Dm.u$ est une force appelée poussée, correspondant au débit de quantité de mouvement.