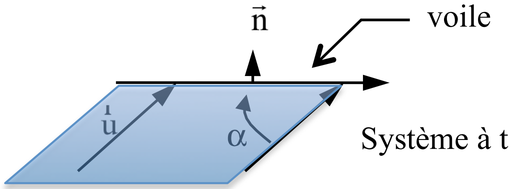
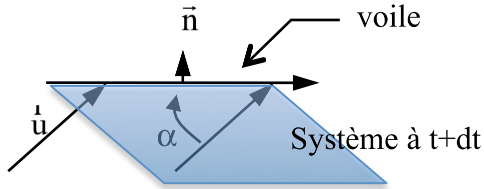
Vent sur une voile : corrigé :





On considère la veine de vent qui se réfléchit sur la voile pendant dt.
On se place dans le référentiel lié à la voile, que l'on suppose galiléen (le bateau avance constante).
Sa masse est : dm =D_m.dt = $\iint_S \rho.\vec{u}\,.d\vec{S}.dt$ =ρ.u.sinα.S.dt.
Soit $\overrightarrow{u'}$ la vitesse du vent réfléchi par la voile.
La variation de quantité de mouvement est :

$$D\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = dm.\overrightarrow{u'} - dm.\vec{u} = dm\left(\overrightarrow{u'} - \vec{u}\right)$$
$$= -dm.2u.sin\alpha.\vec{n} = -2\rho S u^2.sin^2\alpha.dt.\vec{n}$$

Les forces exercées sur la veine de vent sont :

- les forces de pression dues à l'air autour de cette veine, supposé à pression P_0 uniforme ;
- la force de pression exercée par la voile $\overrightarrow{F_{voile/vent}} = -\overrightarrow{F_{vent/voile}}$.

Si la voile n'était pas présente, la résultante des forces de pression dues à P_0 serait nulle ; on en déduit que cette force est P_0.S. $\vec{n}$.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = -2\rho S u^2.sin^2\alpha.\vec{n} = \mathrm{P_0}.\mathrm{S}.\vec{n} + \overrightarrow{F_{voile/vent}}$$

La voile est soumise :

- A la force exercée par la vien de vent précédente $\overrightarrow{F_{vent/voile}} = -\overrightarrow{F_{voile/vent}}$;
- A la force exerceé par l'air situé de l'autre coté de la voile, supposé à P_0 : -P_0.S. $\vec{n}$

La résultante de ces forces est :

$$\overrightarrow{F_{totale/voile}} = 2\rho S u^2.sin^2\alpha.\vec{n}$$

La composante propulsive de cette force est la projection sur la direction de $\vec{V}$, vitesse du bateau.

On a donc :

$$F_{prop} = 2\rho S u^2.sin^2\alpha.cosa$$

La dérivée de cette force propulsive par rapport à α (ou un tracé) montre que le maximum correspond à :

tan²α = 2, soit α = 54,7°

Tige dans un fluide visqueux : corrigé :

a) Le système considéré est le fluide contenu à l'instant t dans le cylindre de longueur L entre les rayons r=a et r quelconque < R.

La variation de quantité de mouvement de ce système est nulle car l'écoulement est staionnaire et la vitesse ne dépend que de r.

Les forces exercées sur le système sont :

- les forces de viscosité exercées par la tige en r = a :

$$\overrightarrow{F_{tige/système}} = -\eta\left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_{r=a}.2\pi aL.\overrightarrow{u_z}$$

- les forces de viscosité exercées par le fluide entourant le système :

$$\overrightarrow{F_{fluide/système}} = \eta\frac{dv(r)}{dr}.2\pi rL.\overrightarrow{u_z}$$

Le theoreme du centre de masse appliqué au système s'écrit :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \overrightarrow{F_{tige/système}} + \overrightarrow{F_{fluide/système}}$$

soit en projection sur Oz :

$$\frac{dv(r)}{dr}.r = \left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_{r=a}.a$$

Le champ des vitesses s'obtient par integration :

$$v(r) = \left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_{r=a}.a.Ln(r) + A$$

Les conditions aux limites sont :

$$v(R) = 0 \text{ et } v(a) = U$$

On en déduit :

$$v(r) = U.\frac{Ln(\frac{r}{R})}{Ln(\frac{a}{R})}$$

La force exercée par le fluide sur la tige sur une longueur L de fluide est :

$$\overrightarrow{F_{fluide/tige}} = +\eta\left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_{r=a}.2\pi aL.\overrightarrow{u_z}$$

soit :

$$\overrightarrow{F_{fluide/tige}} = +\eta\frac{U}{Ln(\frac{a}{R})}.2\pi L.\overrightarrow{u_z} = -\eta\frac{1}{Ln(R/a)}.2\pi L.\vec{U}$$

La force par unite de longueur est donc :

$$\frac{\overrightarrow{F_{fluide/tige}}}{L} = -\frac{2\pi\eta}{Ln(R/a)}.\vec{U}$$

La puissance dissipée par unite de longueur est donc :

$$P = \frac{\overrightarrow{F_{fluide/tige}}}{L}.\vec{U} = -\frac{2\pi\eta}{Ln(R/a)}.U^2$$