CHAPITRE 1 : CHANGEMENT DE REFERENTIELS

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1 Changements de référentiel en mécanique classique	
Cas d'un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre : transformation de Galilée, composition des vitesses.	Relier ces lois à la relation de Chasles et au caractère supposé absolu du temps.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement.	Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement, accélération de Coriolis.	Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. Citer et utiliser l'expression de l'accélération de Coriolis.

Problématique : le programme de première année se restreint aux mouvements dans des référentiels galiléens, or il arrive souvent que l'on se trouve dans d'autres cas :

- Voiture ou ascenseur en phase d'accélération ;
- Manège ;
- Mouvement de la Terre !

Plutôt que se rapporter à un référentiel galiléen, il est plus pratique d'adapter les lois de la mécanique pour comprendre les expériences vécues dans le référentiel propre de l'observateur.

Mais avant de faire intervenir les forces, nous devons examiner la cinématique résultant d'un changement de référentiel.

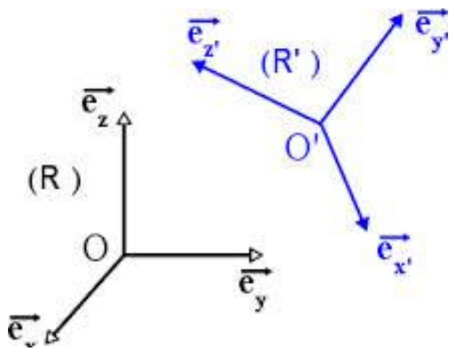
En mécanique classique, **le temps est absolu** : il est le même dans les différents référentiels.

1. Définitions :

1.1. Référentiels absolu et relatif :

Soit R un référentiel, auquel est attaché un système d'axes Oxyz, de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ et R' un référentiel animé par rapport à R d'un mouvement quelconque, auquel est attaché un système d'axes O'x'y'z' d'origine O' et de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}$ et $\overrightarrow{e_{z'}}$.

R est appelé **référentiel absolu** et R' **référentiel relatif.**



Le mouvement du mobile M étudié par rapport à R est le mouvement absolu, par rapport à R' est le mouvement relatif.

La position de M peut s'exprimer par :

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{O'M} = x'.\overrightarrow{e_{x'}} + y'.\overrightarrow{e_{y'}} + z'.\overrightarrow{e_{z'}}$$

Définition : La vitesse du mobile M considéré par rapport au référentiel absolu est appelée vitesse absolue ; on la note :

$$\vec{v}(M)_R \text{ ou } \overrightarrow{v_a}$$

On a :

$$\overrightarrow{v_a} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{dx}{dt}.\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt}.\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{e_z} = \dot{x}.\overrightarrow{e_x} + \dot{y}.\overrightarrow{e_y} + \dot{z}.\overrightarrow{e_z}$$

Définition La vitesse du mobile M considéré par rapport au référentiel relatif est appelée vitesse relative ; on la note :

$$\vec{v}(M)_{R'} \text{ ou } \overrightarrow{v_r}$$

On a :

$$\overrightarrow{v_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} = \frac{dx'}{dt}.\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{dy'}{dt}.\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{dz'}{dt}.\overrightarrow{e_{z'}} = \dot{x}'.\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'.\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'.\overrightarrow{e_{z'}}$$

Définition L'accélération du mobile M considéré par rapport au référentiel absolu est appelée accélération absolue ; on la note :

$$\vec{a}(M)_R \text{ ou } \overrightarrow{a_a}$$

On a :

$$\overrightarrow{a_a} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \frac{d^2x}{dt^2}.\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\overrightarrow{e_z} = \ddot{x}.\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}.\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}.\overrightarrow{e_z}$$

Définition L'accélération du mobile M considéré par rapport au référentiel relatif est appelée accélération relative ; on la note :

$$\vec{a}(M)_{R'} \text{ ou } \overrightarrow{a_r}$$

On a :

$$\overrightarrow{a_r} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right)_{R'} = \frac{d^2x'}{dt^2}.\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{d^2y'}{dt^2}.\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{d^2z'}{dt^2}.\overrightarrow{e_{z'}} = \ddot{x}'.\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'.\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}'.\overrightarrow{e_{z'}}$$

Nous allons relier ces grandeurs dans deux cas particuliers très fréquents :

- la **translation** (sans rotation)
- la **rotation uniforme autour d'un axe fixe** (sans translation).

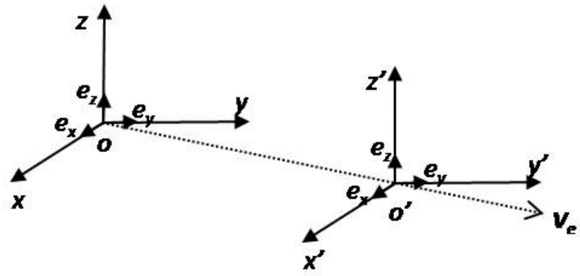
1.2. Notion de point coïncidant :

Définition : On appelle **point coïncidant** le point P fixe par rapport à R' et confondu à l'instant t avec M.

Définition : La vitesse du point coïncidant – par rapport à R – est appelée **vitesse d'entrainement**.

Définition : l'accélération du point coïncidant – par rapport à R – est appelée **accélération d'entrainement**.

2. Cas ou R' est en translation par rapport à R :



2.1. Définition :

Définition : les axes du référentiel R' gardent une direction fixe par rapport à R.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right)_R = \vec{0} \ ; \ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right)_R = \vec{0} \ ; \ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R = \vec{0}$$

Il est commode de choisir $\overrightarrow{e_{x'}} = \overrightarrow{e_x}$; $\overrightarrow{e_{y'}} = \overrightarrow{e_y}$; $\overrightarrow{e_{z'}} = \overrightarrow{e_z}$.

2.2. Vitesse et accélération d'entrainement :

Propriété : tous les points liés au référentiels R' (ie fixes par rapport à R') ont la même vitesse par rapport à R : cette vitesse est la vitesse d'entrainement.

$$\overrightarrow{v_e} = \vec{v}(P) = \vec{v}(O') = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

De même :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{a}(O')_{/R}$$

2.3. Loi de composition des vitesses :

On choisit : $\overrightarrow{e_{x'}} = \overrightarrow{e_x}$; $\overrightarrow{e_{y'}} = \overrightarrow{e_y}$; $\overrightarrow{e_{z'}} = \overrightarrow{e_z}$.

On a :

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt}.\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'.\overrightarrow{e_x} + y'.\overrightarrow{e_y} + z'.\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\overrightarrow{e_x} + \frac{dy'}{dt}.\overrightarrow{e_y} + \frac{dz'}{dt}.\overrightarrow{e_z}$$

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$
$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

Loi de composition des vitesses ♡

2.4. Composition des accélérations :

L'accélération absolue du point M est :

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\overrightarrow{e_z}$$

L 'accélération relative du point M est :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}.\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y'}{dt^2}.\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z'}{dt^2}.\overrightarrow{e_z}$$

Et en dérivant la loi de composition des vitesses par rapport au temps, on obtient :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}}$$

Loi de composition des accélérations ♡

2.5. Cas où R' est en translation **rectiligne uniforme** par rapport à R :

$$\vec{v}(O') = \overrightarrow{cte}\ ;\ \vec{a}(O') = \vec{0}$$

Supposons

$$\vec{v}(O') = v.\overrightarrow{e_x}$$

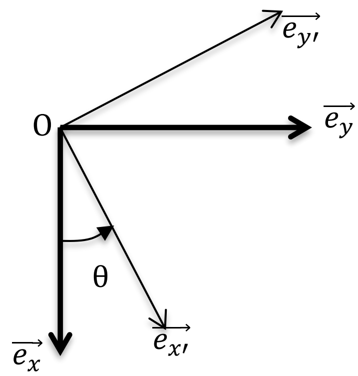
Si l'on suppose qu'à t = 0, O et O' sont confondus, on a :

$$\begin{cases} x = x' + v.t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Transformation de Galilée

3. Cas ou R' est en rotation uniforme par rapport à R :

3.1. Rotation ; vecteur rotation :



Cette rotation s'effectue autour d'un axe fixe par rapport au référentiel R.

Soit par exemple Oz cet axe ; il est commode de choisir O'=O.
Le référentiel R' tourne à vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

On définit le **vecteur rotation** du référentiel R' par rapport au référentiel R :

$$\boldsymbol{\vec{\omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}} \quad ♡$$

Lorsque $\dot{\theta} = cte$, la rotation est dite **uniforme**.

3.2. Dérivation de vecteurs mobiles :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{x'}}\ ;\ \left(\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{y'}}$$

Remarque : on a également :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{e_{z'}}$$

les deux membres de cette égalité étant nuls.

3.3. Vitesse et accélération d'entrainement :

Le point coïncident P est en rotation à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à R, sa trajectoire est circulaire de rayon O'M.

$$\overrightarrow{O'P} = x'.\overrightarrow{e_{x'}} + y'.\overrightarrow{e_{y'}} + z'.\overrightarrow{e_{z'}}$$

avec x', y' et z' constants puisque P est un point fixe par rapport au référentiel R', mais $\overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}\ et\ \overrightarrow{e_{z'}}$ variant avec t par rapport à R.

On en déduit :

$$\overrightarrow{v_e} = \vec{v}(P) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = x'.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + y'.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + z'.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

L'accélération d'entrainement est l'accélération du point coïncidant :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_e} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = -\omega^2.\overrightarrow{HM}}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

3.4. Loi de composition des vitesses :

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt}.\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'.\overrightarrow{e_{x'}} + y'.\overrightarrow{e_{y'}} + z'.\overrightarrow{e_{z'}} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{dy'}{dt}.\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{dz'}{dt}.\overrightarrow{e_{z'}}$$

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M}$$

En dérivant cette équation dans R par rapport au temps, on déduit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}}$$

Loi de composition des vitesses

3.5. Loi de composition des accélérations :

L'accélération absolue est :

$$\overrightarrow{a_a} = \ddot{x}.\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}.\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}.\overrightarrow{e_z}$$

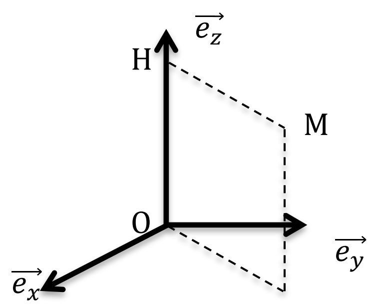
L'accélération relative est :

$$\overrightarrow{a_r} = \ddot{x}'.\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'.\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}'.\overrightarrow{e_{z'}}$$

En dérivant par rapport au temps la loi de composition des vitesses, on calcule (démonstration an annexe) :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}}$$

Loi de composition des accélérations



Où l'accélération d'entrainement est :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_e} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = -\omega^2.\overrightarrow{HM}}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

$\overrightarrow{a_c}$ est l'accélération de Coriolis (ou complémentaire) :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}}$$

Remarque : l'accélération de Coriolis est nulle lorsque la vitesse angulaire est nulle, ou que la vitesse relative est nulle.

Résumé :

Loi de composition des vitesses :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

$$\textbf{Translation : } \overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

$$\textbf{Rotation uniforme : } \overrightarrow{v_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Loi de composition des accélérations :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

$$\textbf{Translation : } \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \ ; \ \overrightarrow{a_c} = \vec{0}$$

$$\textbf{Rotation uniforme : } \overrightarrow{a_e} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = -\omega^2.\overrightarrow{HM} \ ; \ \overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

Annexe : calcul de l'accélération :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt}.\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt}.\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{e_z} = \frac{dx'}{dt}.\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{dy'}{dt}.\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{dz'}{dt}.\overrightarrow{e_{z'}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

On dérive par rapport à t dans le référentiel R ($\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ $fixes$) :

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{d^2x}{dt^2}.\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\overrightarrow{e_z}}^{\overrightarrow{a_a}}$$

$$= \underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}.\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{d^2y'}{dt^2}.\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{d^2z'}{dt^2}.\overrightarrow{e_{z'}}}_{\overrightarrow{a_r}} + \frac{dx'}{dt}.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + \frac{dy'}{dt}.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + \frac{dz'}{dt}.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}.\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{x'}} + \frac{dy'}{dt}.\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{y'}} + \frac{dz'}{dt}.\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_{z'}}}_{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}} + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}\left(x'.\overrightarrow{e_{x'}} + y'.\overrightarrow{e_{y'}} + z'.\overrightarrow{e_{z'}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}.\overrightarrow{e_{x'}} + \frac{dy'}{dt}.\overrightarrow{e_{y'}} + \frac{dz'}{dt}.\overrightarrow{e_{z'}}\right)}_{\overrightarrow{v_r}} + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\left(x'.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + y'.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + z'.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right)}_{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Pour réviser :

Savoirs :
Définir : référentiel galiléen, référentiel absolu, référentiel relatif, vitesse absolue, vitesse relative, accélération absolue, accélération relative, point coïncidant, vitesse d'entrainement.
Comment s'écrit la loi de composition des vitesses dans le cas le plus général ?
Comment s'écrit la loi de composition des accélérations dans le cas le plus général ?
Quels cas particuliers sont fréquents, et quelles formes prennent alors ces lois ?
Comment s'écrit l'accélération de Coriolis ?

Savoir faire :
Choisir dans un problème donné un référentiel absolu et un référentiel relatif.
Choisir un système de coordonnées adaptées.
Exprimer la vitesse relative du mobile, son accélération relative.
Savoir décrire le mouvement du point coïncidant.
Exprimer la vitesse d'entrainement du mobile, et son accélération d'entrainement.
Calculer la vitesse absolue du mobile à partir de sa vitesse relative et de la vitesse d'entrainement.
Calculer l'accélération absolue du mobile à partir de son accélération relative, de l'accélération d'entrainement et de l'accélération de Coriolis.