

MAGNETOSTATIQUE

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Magnétostatique	
3.1 Champ magnétostatique	
Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'Ampère. Linéarité des équations.	Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère. Utiliser une méthode de superposition.
Propriétés de symétrie. Propriétés topographiques.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens. Associer l'évolution de la norme de \mathbf{B} à l'évasement des tubes de champ.
3.2 Exemples de champs magnétostatiques	
Câble rectiligne « infini ». Limite du fil rectiligne infini.	Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini. Calculer et connaître le champ créé par un fil rectiligne infini. Utiliser ces modèles près d'un circuit filiforme réel.
Solénoïde long sans effets de bords. Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.	Calculer et connaître le champ à l'intérieur, la nullité du champ extérieur étant admise. Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde. Associer cette énergie à une densité d'énergie volumique.
3.3 Dipôles magnétostatiques	
Moment magnétique d'une boucle de courant plane. Rapport gyromagnétique de l'électron. Magnéton de Bohr. Ordre de grandeur de la force surfacique d'adhérence entre deux aimants permanents identiques en contact.	Utiliser un modèle planétaire pour relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique. Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. Interpréter sans calculs les sources microscopiques du champ magnétique. Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent. Obtenir l'expression de la force surfacique d'adhérence par analyse dimensionnelle.
Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure : résultante et moment. Énergie potentielle d'un dipôle magnétique rigide placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.	Utiliser des expressions fournies. Approche documentaire de l'expérience de Stern et Gerlach : expliquer sans calculs les résultats attendus dans le cadre de la mécanique classique ; expliquer les enjeux de l'expérience.

Bibliographie :

- Feynman « électromagnétisme 2 » chapitre 34 : le magnétisme de la matière.
- Cagnac, Pebay-Peyroula « Physique atomique » Tome 1.

Les sources du champ magnétostatique sont les aimants et les courants permanents. Les aimants peuvent être décrits en termes de courants microscopiques.

1. Equations générales :

Les équations locales vérifiées par \vec{B} en régime statique (= stationnaire) sont :

$$\text{div } \vec{B} = 0 ; \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux est :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est nul.

Les lignes de champ \vec{B} ne peuvent diverger à travers une surface fermée ; il n'existe pas de « charges magnétiques ».

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère porte le nom de **théorème d'Ampère** : la circulation du champ \vec{B} le long d'un contour fermé est égale au produit de l'intensité enlacée par μ_0 , soit :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Cela traduit le fait que le champ magnétique « tourne » autour des courants.

2. Exemple : champ créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant I.

Les coordonnées adaptées sont les coordonnées cylindriques.

Expérience : spectre du champ créé par un fil assimilé à un fil infini.

On constate expérimentalement que les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe Oz, soit :

$$\vec{B} = B \cdot \vec{u}_\theta .$$

La distribution de courant étant invariante par translation d'axe Oz et rotation d'angle θ , on en déduit que \vec{B} ne dépend ni de z, ni de θ , ainsi :

$$B = B(r)$$

On choisit pour contour d'Ampère un cercle de rayon r et d'axe Oz.

On montre que le champ créé est:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Remarque : la valeur de μ_0 résulte de la **définition de l'Ampère** : c'est l'intensité d'un courant continu qui, maintenu dans deux fils rectilignes infinis parallèles placés dans le vide, distants de un mètre, produit entre eux une force de $2 \cdot 10^{-7}$ N par unité de longueur.

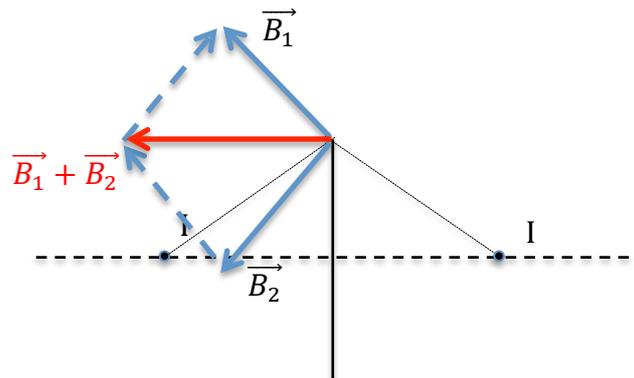
3. Symétries du champ magnétique :

On rappelle que \vec{B} obéit au principe de superposition, car les équations vérifiées par \vec{B} sont linéaires.

3.1. Plan de symétrie d'une distribution de courant :

Considérons deux fils rectilignes infinis parallèles et parcourus par des courants identiques et circulant dans le même sens.

Cette distribution de courants possède un plan de symétrie (P).



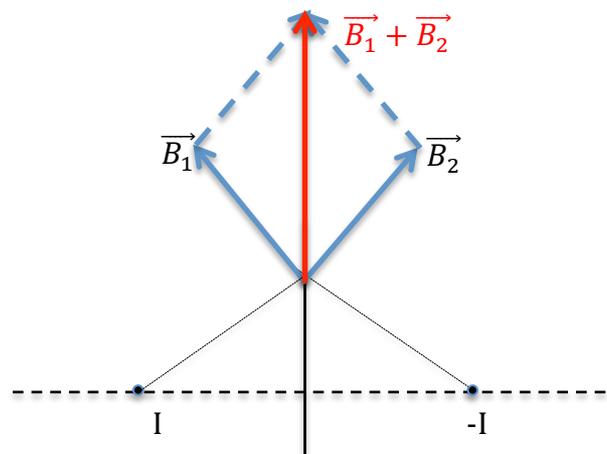
On constate que dans le plan de symétrie $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan ; cette propriété est générale pour toutes les distributions de courant.

En un point M d'un plan de symétrie d'une distribution de charges le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

3.2. Plan d'antisymétrie d'une distribution de courant :

Considérons une distribution similaire avec les courants circulant dans des sens opposés.

Le plan (P) est à présent un plan d'antisymétrie.



On constate que dans le plan de symétrie $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan ; cette propriété est générale pour les distributions de courant.

En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges le champ $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan.

Dans le cas général, une distribution de courants peut présenter à la fois des plans de symétrie et des plans d'antisymétrie, ainsi il est souvent possible de connaître la direction de $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace.

On dit que au contraire de $\vec{E}(M)$, qui est un **vecteur vrai**, $\vec{B}(M)$ est un **pseudo-vecteur** (ou vecteur **axial**).

Les vecteurs en physique sont soit des vecteurs vrais, et ils obéissent aux symétries de $\vec{E}(M)$, soit des vecteurs axiaux, et ils obéissent aux symétries de $\vec{B}(M)$ (voir complément les symétries en physique).

3.3. Exemples :

Pour caractériser les plans, il faut d'abord choisir un système de **coordonnées adaptées**.

Exemple 1 : Couche plane infinie perpendiculaire à l'axe Oz et parcourue par une densité de courant $\vec{j} = cte$.

Exemple 2 : solénoïde assimilé à un solénoïde infini.

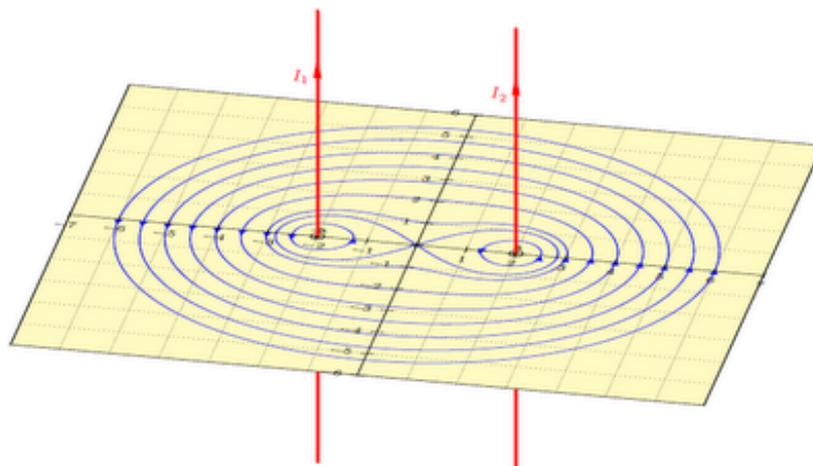
Exemple 3 : bobine torique.

4. Topographie du champ magnétique :

Rappel : les lignes de champ magnétiques sont souvent fermées, et « tournent » autour des courants.

Il est possible de distinguer des lignes de champ magnétique des lignes de champ électrique au voisinage de charges ou de courants :

- le champ électrostatique diverge à partir des charges, le champ magnétostatique tourne autour des courants ;
- le champ électrostatique est à circulation conservative, le champ magnétostatique est à flux conservatif.



5. Exemples de calcul de champ magnétique :

5.1. Méthode de calcul du champ grâce au théorème d'Ampère :

- Choisir un système de coordonnées adaptées ;
- Etudier les invariances de la distribution de courants, afin d'en déduire de quelles variables dépend le champ (ou ne dépend pas le champ !) ;
- Placer un point M quelconque ; chercher les plans de symétrie ou d'antisymétrie passant par M ;
- En déduire la direction du champ
- Chercher un contour d'Ampère passant par M permettant un calcul de circulation.
- Appliquer le théorème d'Ampère.

5.2. Câble rectiligne assimilé à un câble infini :

Le câble possède une section circulaire de rayon R centré sur l'axe Oz ; il est parcouru par un courant d'intensité I réparti uniformément.

La densité de courant circulant dans le câble est donc :

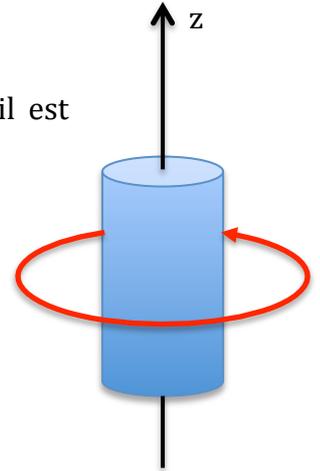
$$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$$

On doit distinguer deux régions pour le calcul du champ : intérieur et extérieur du câble.

Le calcul donne : $r < R$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta$$

$r > R$: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.



Remarque 1 : le champ magnétique est continu en $r = R$.

Remarque 2 : le fil est la limite d'un câble dont le rayon est très petit devant la longueur.

5.3. Solénoïde long.

On considère un solénoïde long, de rayon R, comportant N spires jointives bobinées uniformément, et parcourues par le courant I.

On le caractérisera par le nombre de spires par unité de longueur $n = N/\ell$.

On peut en première approximation négliger les effets de bord, ie considérer le solénoïde comme infini.

On admet alors que le champ à l'extérieur du solénoïde est **nul**.

En effet, on peut considérer ce solénoïde infini comme la limite d'un tore fermé de rayon de courbure R tendant vers l'infini. Pour ce tore il est facile de voir que :

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

On calcule alors :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z$$



On remarque que le champ à l'intérieur du solénoïde est **uniforme**.

5.3. Inductance propre du solénoïde :

L'énergie magnétique stockée dans la bobine est :

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

Cette énergie est localisée dans le champ magnétique avec une densité volumique d'énergie magnétique :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

avec :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} E_m &= \iiint_{\text{espace}} u_m \cdot dV = \iiint_{\text{intérieur du solénoïde}} u_m \cdot dV \\ &= \iiint_{\text{intérieur du solénoïde}} \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\mu_0 \frac{N}{\ell} I \right)^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\mu_0 \frac{N}{\ell} I \right)^2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \ell \end{aligned}$$

Par identification, on calcule l'inductance propre du solénoïde :

$$L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot R^2 / \ell$$

AN : L est de l'ordre de 10 à 100 mH pour les bobines du labo.

Ordre de grandeur de l'énergie emmagasinée : $I_{\max} \approx 4,5 \text{ A}$; $E_{\text{mag}} \approx 100 \text{ mJ}$.

6. Magnétisme dans la matière :

6.1. Moment magnétique microscopique :

Qu'est ce qui explique le magnétisme de la matière ?

Aucune théorie classique ne peut l'expliquer, seule la mécanique quantique permet de comprendre les résultats expérimentaux.

On a vu en PCSI qu'à un circuit plan peut être associé un moment magnétique analogue à celui d'un aimant, et défini par :

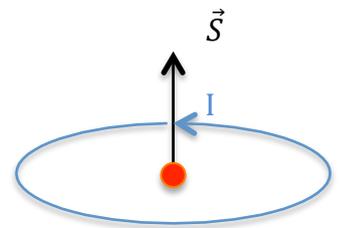
$$\vec{M} = I \cdot \vec{S}$$

Remarque : le vecteur surface est orienté en concordance avec I par la règle du tire-bouchon.

On peut avec le modèle planétaire associer un moment magnétique à un atome d'hydrogène, en considérant que l'électron a une orbite circulaire de rayon a et de pulsation ω .

$$\vec{M} = i \cdot \pi \cdot a^2 \vec{u}_z = -\frac{e}{T} \cdot \pi \cdot a^2 \vec{u}_z = -\frac{e}{2} \cdot a \vec{u}_r \wedge a \omega \vec{u}_\theta = -\frac{e}{2} \cdot \vec{r} \wedge \vec{v}$$

Quel est l'ordre de grandeur de ce moment magnétique ?



On constate que ce moment magnétique est proportionnel au moment cinétique orbital de l'électron :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Le rapport des deux quantités est appelé **rapport gyromagnétique** et noté γ . On a donc :

$$\vec{M} = \gamma \cdot \vec{\sigma} \quad \text{avec } \gamma = -\frac{e}{2m} \text{ pour un électron}$$

Cette propriété se généralise à tout moment cinétique, pour une particule, un atome isolé ou un noyau :

$$\vec{M} = \gamma \cdot \vec{\sigma}$$

L'expérience de Einstein- de Haas 1915 (cf exercice) montre que l'on modifie le moment cinétique d'un corps en modifiant son aimantation.

Cela restera vrai en mécanique quantique, à condition d'introduire dans le rapport gyromagnétique un facteur correctif sans dimension dit « facteur de Landé » noté g :

$$\gamma = -g \frac{e}{2m}$$

On a pu mesurer que pour l'électron g est voisin de 2, car l'électron possède également un moment cinétique dit « de spin » qui s'ajoute au moment cinétique orbital.

6.2. Quantification du moment cinétique :

La mécanique quantique montre que la projection du moment cinétique total d'une particule, d'un atome ou d'une molécule sur un axe quelconque est quantifié :

$$\sigma_z = m_j \hbar \text{ avec } m_j \in (-j, -j + 1, \dots, j - 1, j) \text{ et } \hbar = h/2\pi$$

m_j est le nombre quantique magnétique
 j est le nombre quantique de moment cinétique total.

On montre que le moment cinétique est alors :

$$\sigma = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

La constante \hbar apparaît comme l'ordre de grandeur littéral du moment cinétique.

6.3. Quantification du moment magnétique :

La projection selon un axe quelconque du moment magnétique est quantifiée :

$$M_z = \gamma \cdot \sigma_z = \gamma \cdot m_j \cdot \hbar = g \cdot m_j \cdot \mu_B$$

L'ordre de grandeur du moment magnétique est le magnéton de Bohr et noté μ_B :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2.$$

Précession de Larmor : cf exercice.

6.4. Force surfacique entre deux aimants permanents :

A température ambiante, le fer α cristallise dans une structure cubique centrée de paramètre de maille $a = 289 \text{ pm}$.

On a au maximum de l'ordre de $2 \cdot \mu_B$ par maille, donc un **moment magnétique volumique** (appelée aimantation) maximal de l'ordre de $7,7 \cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$; en pratique l'aimantation est de l'ordre de $10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$

Ordre de grandeur : pour un aimant usuel, $V = 1 \text{ cm}^3$: $M = 1 \text{ A}\cdot\text{m}^2$.

La force F exercée par un aimant sur un support (autre aimant ou plaque métallique) avec lequel il est en contact, dépend de son aimantation, de la constante μ_0 et de la surface S de contact.

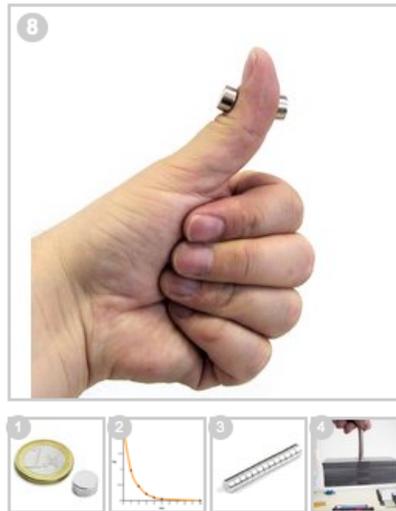
Site Supermagnete.fr. Le champ B produit par l'aimant proposé est de l'ordre de $B = 1 \text{ T}$.

Par analyse dimensionnelle, on a :

$$F = K \cdot \mu_0 \left(\frac{dM}{dV} \right)^2 S$$

où K est un facteur sans dimensions.

Un calcul exact montre que $K = \frac{1}{2}$.



S-10-05-N

Disque magnétique Ø 10 mm, hauteur 5 mm

Néodyme, N42, nickelé

ID article	S-10-05-N
Matériau	NdFeB
Forme	Disque
Diamètre	10 mm
Hauteur	5 mm
Tolérance	+/- 0,1 mm
Revêtement	Nickelé (Ni-Cu-Ni)
Magnétisation	N42
force d'adhérence	~ 2,4 kg
Température max. d'utilisation	80°C
Poids	3 g
Fiche de données en PDF	

Application numérique : $M = 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$; $S = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2$; $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$.
 $F = 100 \text{ N}$.

7. Dipôle magnétostatique :

7.1. Définition :

Un dipôle magnétique est une distribution de courants permanents de moment magnétique non nul étudié à une distance grande devant ses dimensions.

On la caractérise par son moment magnétique \vec{M} .

7.2. Actions subies par le dipôle dans un champ extérieur :

La résultante des forces subies par le dipôle s'écrit :

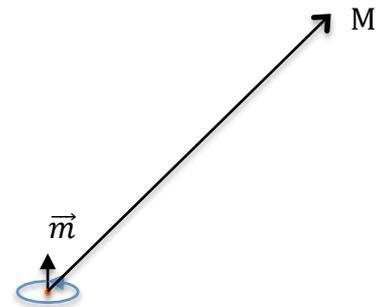
$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B}) \text{ calculé à } \vec{M} \text{ constant.}$$

Le couple résultant est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

L'énergie d'interaction est :

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

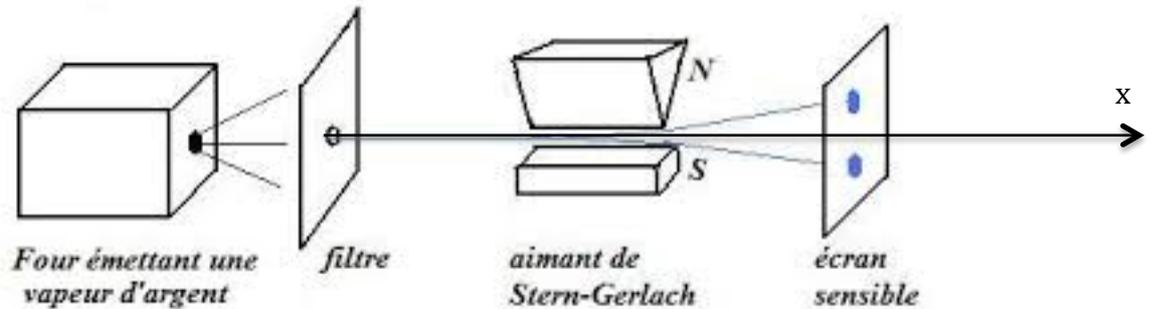


8. Expérience de Stern et Gerlach (1922) :

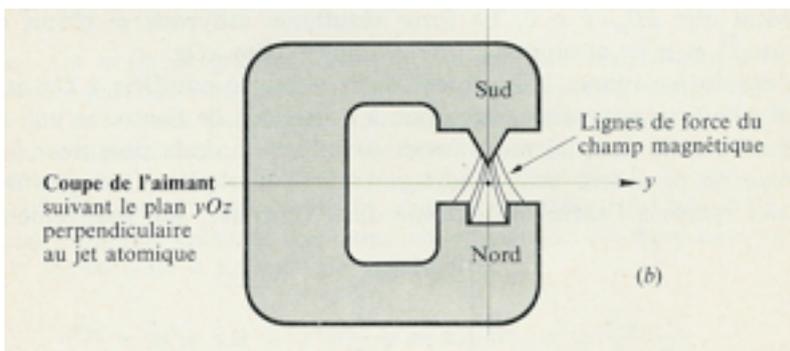
Le but de cette expérience était de mesurer certaines composantes du moment magnétique des atomes.

Des atomes d'argent sont envoyés dans un champ magnétique, et on mesure la déviation subie par le jet.

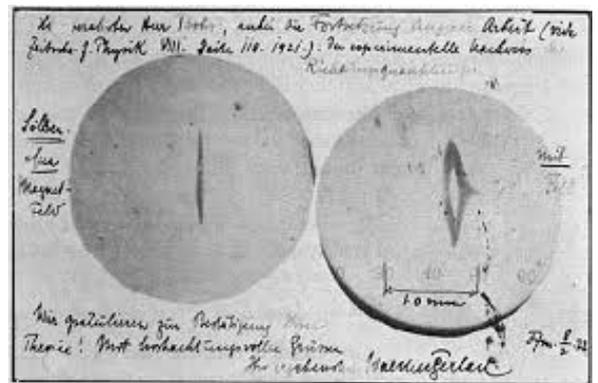
Les atomes possèdent un moment magnétique ; la direction de ce moment est quelconque.



Document 1 : schéma général de l'expérience.



Document 2 : coupe de l'aimant



Document 3 : résultats de Stern et Gerlach
Gauche : sans champ magnétique ; droite : avec champ

- 1) Orienter les lignes de champ magnétique et dessiner quelques vecteurs champ.
- 2) Quelle composante du champ est nulle ?
- 3) Le champ est-il uniforme ?
- 4) Comparer les gradients de champ $\frac{\partial B_z}{\partial y}$ et $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ au voisinage de l'axe Ox.
- 5) On néglige les autres gradients de champ ; quels sont-ils ?
- 6) En ne conservant que le terme prépondérant pour le champ, à quelle force sont soumis les atomes ?
- 7) Schématiser cette force.
- 8) Quel est le résultat attendu si les moments magnétiques des atomes sont orientés aléatoirement ?
- 9) Le résultat de l'expérience est-il conforme à ces prévisions ?
- 10) Pourquoi ?
- 11) Combien de valeurs de M_z sont-elles mises en évidence ?
- 12) Peut-on en déduire les valeurs de certains nombres quantiques de l'atome ?
- 13) Serait-il possible d'observer un nombre différents d'impacts pour d'autres types d'atomes ? Faire le cas échéant une représentation des impacts.