DS DE PHYSIQUE N°5
VENDREDI 10 MARS 2023 – 2 HEURES

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.

(TPC 22)

Le **courant tellurique** est un courant électrique qui circule dans la croûte terrestre. Ce courant possède plusieurs origines :

- la variation du champ magnétique terrestre ;
- le déplacement de fluides conducteurs dans le champ magnétique (magnétohydrodynamique) ;
- les phénomènes d'ionisation dans la haute atmosphère dus au rayonnement solaire.

Ces courants permanents (fort gênants d'ailleurs dans les opérations de sondages électriques) sont alternatifs, leur période est comprise entre 10 et 30 s et leur direction varie dans le temps. La densité moyenne de ces courants est de l'ordre de $2\ A \cdot km^{-2}$.

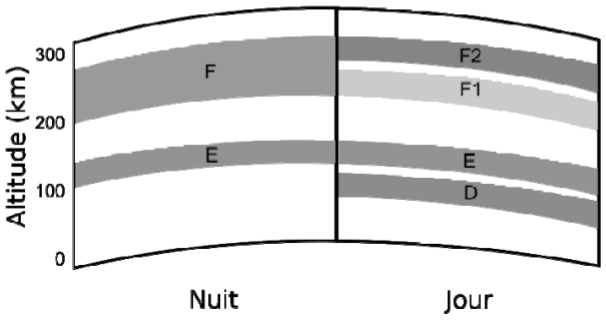
Le principe de la méthode tellurique, qui est passive, consiste à mesurer simultanément le champ magnétique à une station fixe et à une station mobile sur la zone à prospecter. Ces deux mesures permettront de construire des cartes de conductivité du sol.

On ne s'interessera qu'aux courants telluriques générés à la suite de phénomènes d'ionisation de la haute atmosphère.

II.1- Etude du plasma ionosphérique

Document 2 - Caractéristiques de l'ionosphère

Le rayonnement ultraviolet solaire et les vents solaires réagissent sur une partie des molécules atmosphériques en les amputant d'un électron. Un plasma est ainsi créé contenant des nombres égaux d'électrons et d'ions positifs et joue alors le rôle de filtre passe-haut. On distingue généralement trois couches aux propriétés propres vis-à-vis de la propagation des ondes :



- couche D : altitude de 60 à 90 km, pression 2 Pa, densité électronique $10^4\ cm^{-3}$. Elle est constituée d'ions polyatomiques. Absorbante pour les ondes de fréquence inférieure à quelques MHz, elle apparaît avec le lever du Soleil et disparaît immédiatement après le coucher de celui-ci.
- Couche E : altitude de 90 à 120 km, pression 0,01 Pa, densité électronique $10^5\ cm^{-3}$. Elle est constituée d'oxygène et monoxyde d'azote moléculaires ionisés et d'ions météoritiques. Diurne et présente tout au long du cycle solaire. Elle réfléchit les ondes de quelques MHz jusqu'à une fréquence limite qui dépend de l'angle d'incidence de l'onde sur la couche et de la densité de celle-ci.
- Couche F : altitude de 120 à 800 km, pression 10^{-4} Pa, densité électronique $10^6\ cm^{-3}$. Elle est constituée d'atomes d'oxygène, d'azote et d'hydrogène. Très dépendante de l'activité solaire, elle présente un niveau d'ionisation très important pendant les maximas du cycle solaire. Son altitude fluctue en fonction du rayonnement solaire ; la couche F se décompose pendant la journée en deux sous-couches F1 et F2. Ces deux sous-couches se recombinent la nuit plusieurs heures après le coucher du Soleil, mais il arrive qu'elles persistent toute la nuit lors des maximas d'activité solaire.

Source : www.wikipedia.fr

On répondra aux questions suivantes en s'appuyant sur le **document 2**.

Q34. Justifier l'évolution croissante de la densité électronique avec l'altitude.

Q35. Expliquer pourquoi certaines couches disparaîssent la nuit.

Q36. Comment expliquer que la couche D disparaît immédiatement après le coucher du soleil contrairement aux autres couches ?

Q37. La couche F2, en contact avec l'espace, possède en journée une densité électronique plus petite que celle de la couche F1. Proposer une explication.

II.2 - Propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique

Les impacts des particules du vent solaire avec l'ionosphère génèrent ainsi une onde électromagnétique se propageant vers le sol terrestre.
L'équation du mouvement d'un électron libre de l'ionosphère, de masse m et de vitesse $\vec{v}$, soumis à une onde électromagnétique $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$, s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B} - \lambda\vec{v},$$

avec e la charge élémentaire et λ un coefficient.
On supposera l'électron non relativiste.

Q38. Quelle est l'unité de λ ?

Q39. À quoi correspondent les différents termes de cette équation ? Quel terme peut-on négliger si le plasma ionosphérique est supposé peu dense ? Justifier que l'on puisse négliger le terme en $-e\vec{v}\wedge\vec{B}$ devant celui en $-e\vec{E}$.

Une onde plane progressive harmonique, OPPH, se propage dans le plasma contenant n électrons par unité de volume et autant d'ions de masse M_i chacun.

$\vec{E}$ s'écrit en complexe $\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)}$, avec i l'imaginaire pur tel que $i^2=-1$, $\vec{E}_0$ son amplitude, ω sa pulsation, $\vec{k}$ son vecteur d'onde et $\vec{r}$ le vecteur position de l'électron pris depuis une origine arbitraire.

Q40. Déterminer, dans le cadre des approximations de la **Q39**, la vitesse complexe $\underline{\vec{v}}$ d'un électron en fonction de e, m, ω et de $\underline{\vec{E}}$.

Q41. En déduire la vitesse complexe $\underline{\overrightarrow{V_i}}$ d'un ion.

Q42. Évaluer la quantité $\dfrac{\left\|\vec{V_i}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|}$ sachant que l'atmosphère est constituée de 80 % de diazote N_2 et de 20 % de dioxygène O_2 et que la masse d'un proton est environ deux mille fois plus grande que celle d'un électron.
On rappelle les valeurs des masses molaires : $M(\mathrm{O}) = 16\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$; $M(\mathrm{N}) = 14\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q43. Montrer alors qu'en régime permanent le vecteur densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$ complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$$

où l'on donnera l'expression de $\underline{\sigma}$ en fonction de n, e, m et de ω.

Q44. Proposer un nom au complexe $\underline{\sigma}$ par analogie avec une loi locale que l'on citera.

Q45. La puissance volumique moyenne cédée par le champ aux charges s'écrit $\langle p_v \rangle = \frac{1}{2}\Re_e\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right)$, avec $\underline{\vec{E}}^*$ le complexe conjugué associé à $\underline{\vec{E}}$. Calculer p_v et commenter le résultat obtenu.

Q46. Écrire les quatre équations de Maxwell dans le plasma ionosphérique.

Q47. On donne $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$. Établir l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ dans le plasma ionosphérique.

Q48. En déduire que pour une OPPH, le module d'onde k est donné par :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$$

où l'on donnera l'expression de ω_P en fonction de n, e, m et de ε_0 la permittivité du vide. Donner un nom à cette relation ainsi qu'à la pulsation ω_P.

Q49. Expliquer pourquoi le plasma ionosphérique est qualifié de filtre passe-haut (**document 2**). Dans quel cas parle-t-on d'onde évanescente ?

Q50. Dans le cas d'une propagation dans le plasma, exprimer la vitesse de phase de l'onde. Comparer à la vitesse de la lumière c et commenter.

Q51. Les courants telluriques ont une période comprise entre 10 et 30 s. Déterminer quelle doit être la densité électronique maximale n_{max} d'un plasma laissant passer l'onde responsable de l'apparition de ces courants (on supposera qu'il n'y a aucun enrichissement spectral dans le sol).

Données : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0 \cdot 10^9$ m.F^{-1}.

Comparer n_{max} aux densités électroniques des couches D, E et F, puis conclure.

II.3 - Courant tellurique

L'onde électromagnétique générée dans la haute atmosphèrearrive en incidence normale sur le sol conducteur.

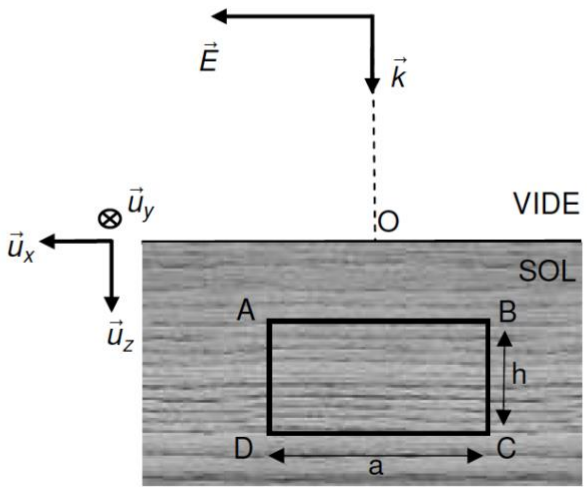


Figure 16 - Onde électromagnétique en incidence normale sur le sol

À une profondeur z, on modélise une partie du sol conducteur par une spire rectangulaire ABCD de longueur a et de hauteur h suffisamment faible pour négliger les variations spatiales du champ magnétique $\vec{B}$. Ce dernier s'écrit alors sur toute la surface de la spire $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$. On négligera l'action du champ électrique de l'onde sur le conducteur.

Q52. D'après la **figure 16**, quelle est la direction prise par le champ $\vec{B}$ dans le vide ? On supposera que cette direction ne change pas dans le sol.

Q53. Préciser l'expression "h suffisamment faible ".

Q54. Décrire à l'aide de la loi de Lenz, que l'on rappellera, les conséquences du phénomène d'induction se produisant dans la spire.

On suppose que la spire ABCD est assimilable à un circuit électrique de résistance R.

Q55. Représenter le schéma électrique équivalent de la spire ABCD en y précisant le sens conventionnel choisi.

Q56. Déterminer l'expression de la force électromotrice générée dans la spire ABCD en tenant compte d'un phénomène d'auto-induction d'inductance L.

Q57. Montrer alors que l'intensité i circulant dans la spire satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{B_0 a h \omega}{L} \sin \omega t$$

où l'on exprimera τ en fonction de R et de L.

Q58. Déterminer l'expression de l'amplitude I_m de i en régime sinusoïdal forcé.

On modélise la spire comme un conducteur de section carrée de côté d.

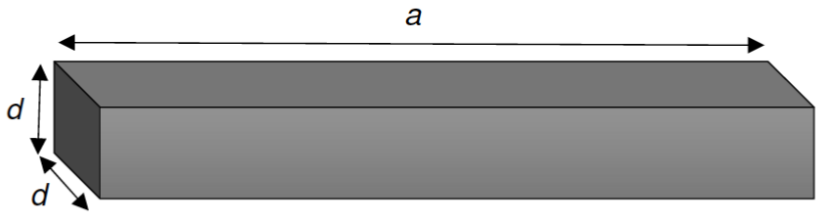


Figure 17 - Modélisation volumique d'une portion de spire

On donne les dimensions de la spire : $a = 1{,}0\ \text{km}$, $h = 10\ \text{m}$ et $d = 1{,}0\ \text{cm}$.
Pour les applications numériques, on prendra $B_0 = 10\ \mu\text{T}$, $L = 1{,}0\ \text{mH}$, $\omega = 0{,}63\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\gamma = 20\ \text{mS} \cdot \text{m}^{-1}$ la conductivité du sol.

Q59. Montrer d'après ces valeurs que l'expression de I_m se simplifie en :

$$I_m \simeq \frac{B_0 h \omega d^2}{2} \gamma .$$

Q60. Calculer alors l'amplitude J_m de la densité volumique de courant supposée uniforme sur toute section de la spire. Commenter la valeur obtenue en comparaison aux $2\ \text{A} \cdot \text{km}^{-2}$ décrit dans l'énoncé.

Q61. Comment la mesure d'un champ magnétique en surface au-dessus de la zone à prospecter permet-elle de construire des cartes de conductance des sols ?

2 Méthode tellurique

2.1 Étude du plasma ionosphérique

Q34. Les différentes couches présentées sont ionisées par le rayonnement solaire. En descendant dans l'atmosphère, les rayons sont moins puissants puisqu'une partie à déjà été absorbée par les couches plus hautes. Il est donc logique que la densité électronique issue de l'ionisation soit plus faible dans les couches de plus basse altitude.

Q35. Le rayonnement UV direct du Soleil n'est plus présent la nuit, donc certaines couches de l'ionosphère disparaissent la nuit puisqu'elle ne sont plus ionisées.

Q36. La couche D est celle de plus basse altitude, donc qui reçoit le moins de rayonnement solaire et est la « moins ionisée ». Il est donc cohérent que ce soit celle qui disparaissent en premier dès le coucher du Soleil.

Q37. On peut supposer que la couche F_2 en contact direct avec l'espace, permet aux particules ionisées de s'y échapper si elles ont suffisamment d'énergie, ce qui pourrait expliquer que la densité électronique y est plus faible. Ce n'est pas le cas de la couche F_1.

2.2 Propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique

Q38. Par analyse dimensionnelle, λ est en $\mathrm{kg.s^{-1}}$. Il s'agit d'un coefficient de friction type frottements fluides.

Q39. L'équation donnée est un bilan mécanique (Principe Fondamental de la Dynamique) avec :

- $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: terme inertiel, dérivée de l'impulsion
- $-e\vec{E}$: partie électrique de la force de Lorentz sur un électron
- $-e\vec{v}\wedge\vec{B}$: partie magnétique de la force de Lorentz sur un électron
- $-\lambda\vec{v}$: force de friction que l'on peut supposer due aux impacts entre particules chargées (type modèle de Drude)

Dans un plasma peu dense ($n \sim 10^6\ \mathrm{cm^{-3}} = 10^{12}\ \mathrm{m^{-3}}$), on peut probablement négliger la force de friction.
Pour une onde électromagnétique, on s'attend à avoir en ordre de grandeurs : $\|E\| \sim c\left\|\vec{B}\right\|$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide. Ici avec l'hypothère de particules non relativistes :

$$\frac{\left\|-e\vec{v}\wedge\vec{B}\right\|}{\left\|-e\vec{E}\right\|} \sim \frac{evB}{eE} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

On peut donc négliger le terme magnétique devant le terme électrique de la force de Lorentz.

Q40. L'équation mécanique se résume désormais à :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} \tag{23}$$

On étudie la propagation d'une OPPH en utilisation la notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$.
On a donc l'écriture : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mapsto \times i\omega$.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} \quad \mapsto \quad mi\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{e}{im\omega}\underline{\vec{E}} \tag{24}$$

Q41. En faisant le même raisonnement pour un ion du plasma (charge $+e$, masse m_i).

$$\underline{\vec{v_i}} = \frac{e}{im_i\omega}\underline{\vec{E}} \tag{25}$$

Q42. Quelle est la masse typique d'un ion de ce plasma ? On prend un modèle d'atmosphère composé de :

- O_2 à 20% possédant 32 nucléons
- N_2 à 80% possédant 28 nucléons

donc cela donne un ions typique avec 29 nucléons en moyenne. On nous indique également que la masse d'un proton (donc presque celle du neutron aussi) est environ 2000 fois plus élevée que celle de l'électron.
Donc $m_i \sim 29 \times 2000 \times m_e \gg m$. Or les vitesses sont inversement proportionnelles aux masses dans les expressions précédentes donc $\|\vec{v_i}\| \ll \|\vec{v}\|$.

Q43. On peut donc considérer que le vecteur densité volumique de courant électrique est essentiellement lié au mouvement des électrons.

$$\vec{j} = n \times (-e) \times \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}}$$

alors avec les résultats précédents :

$$\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}} \tag{26}$$

Q44. On nomme $\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{im\omega}$ la conductivité électrique complexe du milieu par analogie avec la loi d'Ohm locale.

Q45. Puissance volumique cédée aux porteurs de charges :

$$\begin{aligned}\langle p_V \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\right\} \\ &= \frac{ne^2}{2m\omega}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\left\|\underline{\vec{E}}\right\|^2\right\} = 0\end{aligned}$$

Dans le plasma, aucune puissance n'est cédée aux porteurs de charges : $\langle p_V \rangle = 0$. Les champs réels $\vec{E}$ et $\vec{j}$ sont en quadrature de phase.

Q46. Écrivons les équations de Maxwell dans le plasma ionosphérique en notations réelles. La densité électronique de charges $\mu = 0$ car il est indiqué dans le document 2 que le plasma contient un nombre égal d'électrons et d'ions positifs.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) &= \frac{\mu}{\varepsilon_0} = 0 \\ \mathrm{div}\left(\vec{B}\right) &= 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right) &= \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

avec $\vec{j} = \mathrm{Re}\left\{\underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}\right\}$

Q47. Équation de propagation du champ électrique

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \Delta\vec{E} &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ \vec{0} - \Delta\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right)\right) \\ -\Delta\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ \Leftrightarrow \Delta\vec{E} &= \mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

en faisant apparaître la célérité de la lumière dans le vide : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$,

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \tag{27}$$

Q48. Pour la propagation d'une pseudo-OPPH, on utilise la notation complexe pour faire apparaître une **relation de dispersion** portant sur le module d'onde k. Les dérivées se remplacent avec : $\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \times i\omega$ et $\Delta = \vec{\nabla}^2 \mapsto \times(-i\vec{k})^2 = -k^2$.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \\
\mapsto -k^2\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\times(i\omega)^2\underline{\vec{E}} &= \mu_0 \times i\omega\,\underline{\vec{j}} \\
\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} &= \mu_0 i\omega \times \frac{ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}} \\
\Leftrightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2\mu_0}{m}\right)\underline{\vec{E}} &= \vec{0} \\
\text{donc} \quad -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2\mu_0}{m} &= 0
\end{aligned}$$

En mettant au même dénominateur, on fait apparaître un terme homogène à une pulsation ce qui permet d'écrire :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \tag{28}$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$, la pulsation plasma du milieu.

Q49. Le plasma ionosphérique peut être considéré comme un filtre passe-haut pour les ondes électromagnétiques car :

- à basse fréquence $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$ donc $k = i|k|$ imaginaire pur.
  L'onde est alors **évanescente** et ne se propage pas au sein du plasma, en plus d'être exponentiellement atténuée.
- à haute fréquence $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$ donc $k \in \mathbb{R}$ réel.
  L'onde peut alors se propager sans atténuation dans le plasma.

Q50. Dans le cas d'une propagation dans le plasma : $k^2 > 0$ et

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \tag{29}$$

La vitesse de phase est alors :

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \tag{30}$$

Dans ce cas, on a $v_\phi > c$ la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant la vitesse de phase ne représente pas un transport réel d'énergie ou d'information. Si on fait le calcul en écrivant le vecteur de Poyntig, on fera apparaître la vitesse de groupe qui elle reste inférieure à c.
Remarque : la notion de vitesse de phase et de vitesse de groupe et donc ce commentaire probablement attendu sont hors programme de TPC en 2021-2022.

Q51. On souhaite étudier la configuration limite dans laquelle le plasma laisse passer les ondes telluriques. Le plasma laisse passer les ondes si $\omega > \omega_p$. Pour que toutes les ondes passent, il faut que celles de plus faible pulsation passent, ce qui correspond aux périodes maximales.
$\omega_{\text{min}} = \frac{2\pi}{T_{\text{max}}}$ avec $T_{\text{max}} = 30\ \text{s}$. On souhaite avoir :

$$\begin{aligned}
\omega_p < \omega_{\text{min}} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{n_{\text{max}}e^2}{m\varepsilon_0}} < \frac{2\pi}{T_{\text{max}}} \\
\Leftrightarrow n_{\text{max}} < \frac{m\varepsilon_0}{e^2} \times \left(\frac{2\pi}{T_{\text{max}}}\right)^2 &\simeq 10^{-5}\ \text{m}^{-3} \simeq 10^{-11}\ \text{cm}^{-3}
\end{aligned}$$

Cette valeur est très inférieure aux valeurs des couches ionosphériques présentées dans le document 2 (10^4 à $10^6\ \text{cm}^{-3}$). Donc les ondes telluriques sont totalement réfléchies par l'ionosphère.

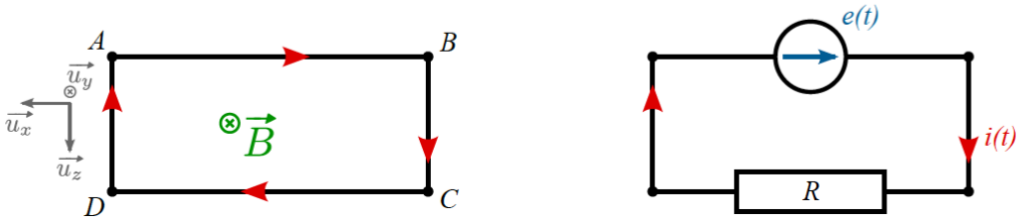
2.3 Courant tellurique

Q52. Dans le vide, les ondes électromagnétiques sont structurées telles que $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forme un trièdre direct. Ici on a $\vec{k} \parallel \vec{u_z}$ et $\vec{E} \parallel \vec{u_x}$ donc le champ magnétique $\vec{B}$ est selon $\vec{u_y}$.
On supposera que cette direction ne change pas dans le sol.

Q53. On suppose que l'on peut négliger les variations **spatiales** du champ magnétique $\vec{B}$ sur la hauteur h de la spire modèle, donc que $h \ll \lambda$ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique.

Q54. La loi de Lenz indique que les effets du phénomène d'induction tendent à s'opposer aux causes qui les ont créées. Par exemple ici, le phénomène d'induction dû aux variations d'un champ magnétique externe $\vec{B}(t)$ va induire un courant électrique dans la spire, de sorte à ce que le champ magnétique induit ainsi créé par la spire soit de sens opposé à ces variations de $\vec{B}(t)$.

Q55. On représente sur le schéma ci-dessous le sens de circulation du courant électrique choisi dans la spire et le schéma électrique équivalent tenant compte d'une résistance totale R. Le phénomène d'induction crée une force éléctromotrice $e(t)$.



Q56. Force électromotrice induite

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \quad \text{loi de Faraday où } \Phi \text{ est le flux du champ magnétique à travers la spire}$$

$$\text{et} \quad \Phi = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{propre}} \quad \text{les flux du champ extérieur de l'onde et le flux propre d'auto-induction}$$

$$\Phi_{\text{propre}} = Li(t) \quad \text{par définition}$$

$$\text{et} \quad \Phi_{\text{ext}} = \iint \vec{B}.\vec{\mathrm{d}S} = \int_0^a \int_0^h B_0 \cos(\omega t)\vec{u_y}.\mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{u_y} = B_0 \cos(\omega t)ha$$

$$\text{donc} \quad e(t) = B_0\omega \sin(\omega t)ha - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Q57. En appliquant la loi des mailles dans le circuit électrique schématisé précédemment, on obtient :

$$e(t) = Ri(t)$$

$$B_0\omega \sin(\omega t)ha - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{B_0ah\omega}{L}\sin(\omega t)$$

On peut faire apparaître le temps caractéristique $\tau = \dfrac{L}{R}$ dans l'équation précédente qui prend alors une forme canonique d'équation différentielle d'ordre 1 (avec second membre harmonique).

Q58. Pour déterminer l'amplitude I_m du courant électrique $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé, on propose d'adopter la notation complexe : $\underline{i}(t) = \underline{i_m}e^{i\omega t}$ avec $I_m = |\underline{i_m}|$.
L'équation précédente devient alors (attention $\omega \sin(\omega t)$ est une dérivée du terme initial $\cos(\omega t)$) :

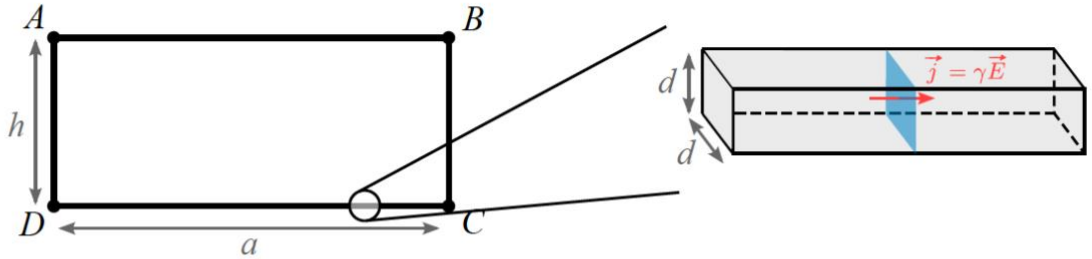
$$i\omega\underline{i_m} + \frac{1}{\tau}\underline{i_m} = \frac{iB_0ah\omega}{L}$$

$$\Leftrightarrow \underline{i_m} = \frac{B_0ah}{L}\frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}$$

Donc l'amplitude recherchée est :

$$I_m = |\underline{i_m}| = \frac{B_0ah\omega\tau}{L}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \tag{31}$$

Q59. À partir des données et hypothèses proposées, cherchons une estimation de la résistance R, puis du temps τ, afin de simplifier enfin l'expression de I_m.
On prend un modèle rectangulaire pour les portions de spire, avec une section carrée d^2, et $d = 1,0\ \mathrm{cm}$. Les longueurs des portions verticales et horizontales sont $h = 10\ \mathrm{m}$ et $a = 1,0\ \mathrm{km}$.



On a $a \gg h \gg d$. On peut donc supposer que la densité volumique de courant est uniforme sur la section de notre modèle. Le courant total traversant une section est :

$$I = \iint \vec{j}.\vec{\mathrm{d}S} = j \times d^2 = \gamma E \times d^2$$

avec γ la conductivité électrique du matériau en prenant un modèle de loi d'Ohm. Pour une portion de longueur totale L on a un lien entre champ électrique et différence de potentiel du type : $E \simeq \dfrac{\Delta V}{L}$, ce qui permet de passer à l'écriture de la loi d'Ohm globale :

$$I = \gamma \frac{\Delta V}{L} d^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta V = \frac{L}{\gamma d^2} I = R\, I$$

Dans notre modèle, on a $a \gg h$ donc on peut considérer que la résistance électrique est essentiellement due aux portions horizontales : deux portions de longueur a. On prendra donc pour longueur de la spire : $L \simeq 2a$.

En conclusion la résistance du circuit est donc : $R = \dfrac{2a}{\gamma d^2} \simeq 10^9\ \Omega$.

On en déduit une valeur du temps caractéristique, avec $L = 1,0\ \mathrm{mH}$: $\tau = \dfrac{L}{R} \simeq 10^{-12}\ \mathrm{s}$.
Enfin, si on compare à la pulsation des ondes $\omega = 0,63\ \mathrm{rad.s^{-1}}$, on a : $\omega\tau \simeq 6,3.10^{-11} \lll 1$.
On peut donc sans problème simplifier l'expression de l'amplitude du courant I_m :

$$I_m = \frac{B_0 a h \omega \tau}{L} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \simeq \frac{B_0 a h \omega \tau}{L} = \frac{B_0 a h \omega}{R} \simeq \frac{B_0 h \omega \gamma d^2}{2}$$

Q60. L'amplitude de densité volumique de courant supposée uniforme sur la section d^2 est :

$$J_m = \frac{I_m}{d^2} \simeq \frac{B_0 h \omega \gamma}{2} = 6,3.10^{-7}\ \mathrm{A.m^{-2}} = 0,63\ \mathrm{A.km^{-2}}$$

Cette valeur est bien du même ordre de grandeur que les $2\ \mathrm{A.km^{-2}}$ annoncés dans l'énoncé en début de partie.

Q61. Dans les expressions précédentes, on fait apparaître un lien de proportionnalité direct entre l'amplitude du champ magnétique B_0 et la conductivité du matériau γ. On peut supposer que des mesures du champ magnétique total au niveau de la surface (résultant des ondes électromagnétiques incidentes et du champ induit) permettent d'accéder à une information sur la conductivité des sols, et notamment ses variations en se déplaçant.