Révisons le cours d'électromagnétisme :

Equations de Maxwell :
Enoncer les équations de Maxwell (formes locales et intégrales).
Enoncer l'équation de conservation de la charge ; la déduire des équations de Maxwell (sachant que $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}=0$).
Définir le vecteur densité de courant, l'intensité.
Définir le vecteurde Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique, la puissance volumique fournie aux charges.
Enoncer l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique.
Enoncer les équations de passage des champs E et B.

ARQS :
Qu'est ce que l'ARQS ? Conséquence sur les équations de Maxwell.
De quels potentiels dérivent les champs E et B ?
Qu'est ce que l'effet de peau ? (qualitatif).

Induction dans un circuit fixe et B variable :
Définir le champ électromoteur et la fém induite.
Enoncer la loi de Faraday (expliciter les termes) .
Enoncer la loi d'Ohm généralisée (idem).
Définir le coefficient d'inductance propre ; le coefficient d'inductance mutuelle. Unités ? Signes ?
Comment s'écrit le flux à travers un circuit ?
Quelle est l'énergie magnétique d'un circuit comprenant une autoinductance ? De deux circuits couplés par mutuelle ?

Induction dans un circuit mobile et B stationnaire :
Définir le champ électromoteur et la fém induite.
Donner l'expression de la force de Laplace ; savoir que leur puissance s'oppose à la puissance de la fém induite.
Savoir retrouver les équations mécanique et électrique du haut-parleur à partir d'un modèle et de ses hypothèses.

Ondes électromagnétiques :

Ligne à constante réparties (coaxe) :
Redémontrer à partir du modèle sans pertes les équations de propagation de i(x,t) et u(x,t).
Comment s'appelle cette équation ?
Quelles en sont les solutions les plus générales ?
Définir une onde progressive, une OPPM.
Définir pour une OPPM la longueur d'onde et la période.
Définir une onde plane stationnaire, et écrire sa forme la plus générale.
Définir ventres et nœuds de vibration.

Ondes planes dans le vide :
Comment s'écrivent les équations de Maxwell dans le vide ?
Etablir les équations de propagation de E et B.
Définir une onde plane et projeter ces équations dans ce cas.
Ecrire la solution générale dans le cas d'une onde plane puis d'une onde plane progressive monochromatique.
Quelle est l'utilité de ce type de solution ?
Comment s'écrit cette onde en notation complexe ?
Démontrer que l'onde est transverse et que les champs sont perpendiculaires entre eux.
Définir la polarisation d'une onde ; quelles polarisations particulières existent-t-elles ?

INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE :

On se place dans l'ARQS.

A. CAS D'UN CIRCUIT FIXE DANS UN CHAMP VARIABLE

1. Force électromotrice induite dans une portion de circuit :

1.1. Champ électromoteur :

On a dans l'ARQS : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Déf : $\vec{E}_m = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est appelé champ électromoteur.

Déf : $e_{AB} = \displaystyle\int_A^B \vec{E}_m.\vec{dl}$ est la force électromotrice induite dans la portion de circuit AB.

1.2.Cas d'un circuit filiforme fermé : loi de Faraday :

Pour un circuit filiforme fermé de contour orienté C :

$$\boxed{e = \oint \vec{E}_m.\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{Loi de Faraday}$$

$\Phi = \displaystyle\iint_S \vec{B}.\vec{dS}$ est le flux de $\vec{B}$ à travers une surface S <u>ouverte</u> s'appuyant sur C et orientée en concordance avec C.

En pratique les circuits inductifs sont des circuits bobinés constitués d'un grand nombre N de spires ; on peut confondre le flux à travers le circuit avec le flux à travers N spires fermées, donc on pourra toujours utiliser la loi de Faraday.

Le signe - de la loi de Faraday traduit **la loi de Lenz** : la fém induite tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

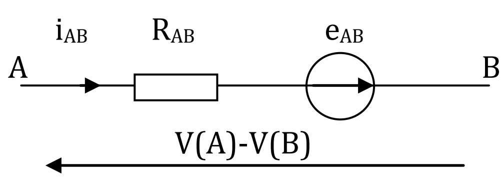
2. Loi d'Ohm généralisée :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E} = \sigma(-\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})} \quad \text{Loi d'Ohm locale}$$

En intégrant cette relation le long d'un circuit filiforme entre deux points A et B, on obtient :

$$\boxed{V(A) - V(B) = R_{AB}.i_{AB} - e_{AB}} \quad \text{Loi d'Ohm intégrale}$$

Modélisation :



3. Coefficients d'inductance propre :

Un circuit traversé par un courant variable crée à travers lui même un flux proportionnel à i(t) appelé flux propre Φ_p ; on parle alors d'**auto-induction**.

Déf : $L = \Phi_P / i(t)$ est le coefficient d'auto-inductance du circuit. Unité : Henry (H)

Propriété : L est toujours positif et ne dépend que de la géométrie du circuit.

La loi d'Ohm s'écrit alors : $V(A) - V(B) = R_{AB}I + LdI/dt$.

Exemple : solénoïde de longueur l section S N spires, assimilé à un solénoïde infini : $L = \mu_0 N^2 S/l$.

4. Coefficients d'inductance mutuelle :

Soit deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par $i_1(t)$ flue à travers le circuit C_2 , créant un flux $\Phi_{1\text{->}2}$ proportionnel à $i_1(t)$.

Déf : $M_{1\text{->}2} = \Phi_{1\text{->}2} / i_1(t)$ est le coefficient d'inductance mutuelle des circuits.

De même le champ magnétique $\vec{B}_2$ créé par $i_2(t)$ flue à travers le circuit C_1, créant un flux $\Phi_{2\text{->}1}$ proportionnel à $i_2(t)$:

Déf : $M_{2\text{->}1} = \Phi_{2\text{->}1} / i_2(t)$ est le coefficient d'inductance mutuelle des circuits.

On a : $M_{2\to1} = M_{1\to2} = M$ (admis). Unité : Henry.

Remarque : M est algébrique ; son signe est lié aux orientations choisies pour C_1 et C_2 et n'a pas de signification physique.

Le flux total à travers le circuit C_1 est : $\Phi_1 = L_1\, i_1(t) + M.i_2(t)$;
Le flux total à travers le circuit C_2 est : $\Phi_2 = L_2\, i_2(t) + M.i_1(t)$.

5. Energie magnétique :

5.1. Cas d'un seul circuit :

Soit un circuit de coefficient d'inductance propre L, parcouru par un courant i(t) :

$W_m = \dfrac{1}{2} Li(t)^2$ est l'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit.
Cette énergie étant positive, on en déduit : $L > 0$.

5.2. Cas de deux circuits couplés par mutuelle :

Soit deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, de coefficients d'inductance propre L_1 et L_2, de coefficient d'inductance mutuelle M :
L'énergie magnétique stockée dans l'ensemble des deux circuits est :

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

B.CAS D'UN CIRCUIT MOBILE DANS UN CHAMP B STATIONNAIRE.

1. Transformation non-relativiste des champs :

Soit R un réferentiel galiléen et C un circuit se déplaçant à la vitesse V_e en mouvement rectiligne uniforme par rapport à R.
Le référentiel R' lié au conducteur est donc galiléen.
Il existe dans R un champ stationnaire $\vec{E}_S, \vec{B}_S$.
Ce champ vu du circuit C est différent, soit $\vec{E}, \vec{B}$.

La force de Lorentz étant invariante par changement de référentiel galiléen, on doit avoir :
$\vec{E}_S + \vec{v}_R \wedge \vec{B}_S = \vec{E} + (\vec{v}_{R'} \wedge \vec{B})$ avec $\vec{v}_R = \vec{v}_{R'} + \vec{V}_e$
soit $\vec{E}_s + (\vec{v}_{R'} + \vec{V}_e) \wedge \vec{B}_s = \vec{E} + \vec{v}_{R'} \wedge \vec{B} \quad \forall \vec{v}_{R'}$

On en déduit : $\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{V}_e \wedge \vec{B}_S, \vec{B} = \vec{B}_S$.

On admettra que ces lois de transformation se généralisent à tout mouvement de C par rapport à R.

2. Force électromotrice induite :

Déf : $\vec{E}_m = \vec{V}_e \wedge \vec{B}$ est appelé champ électromoteur.

Déf : $e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m . d\vec{l}$ est la force électromotrice induite le long d'une portion de circuit AB.

3. Loi d'Ohm généralisée :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma (- \overrightarrow{\mathrm{grad}} V - \vec{V}_e \wedge \vec{B})$$

En intégrant cette relation le long d'un circuit filiforme entre deux points A et B, on obtient :

$$V(A) - V(B) = R_{AB} I - e_{AB}.$$

4. Cas d'un circuit filiforme fermé : loi de Faraday.

Pour un circuit filiforme fermé de contour orienté C :

$$e = \oint (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) . d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{Loi de Faraday}$$

5. Travail des forces de Laplace ; conversion électromécanique :

Le courant induit dans le circuit mobile interagit avec le champ B : le circuit est soumis à une force de Laplace.

Le travail élémentaire de cette force entre t et t+dt est :

$$\delta W = \int_A^B d\vec{F}_L . d\vec{M} = \int_A^B (id\vec{l} \wedge \vec{B}) . \vec{v}_e . dt = idt \int_A^B (\vec{B} \wedge \vec{v}_e) . d\vec{l} = -idt \int_A^B \vec{E}_m . d\vec{l} = -i . e_{AB} . dt.$$

On a donc : $P_{Laplace} + e_{AB}i = 0$

Si la fém induite a un travail moteur ($e_{AB}.i > 0$), la force de Laplace est résistante, son travail étant strictement opposé à celui de la fém induite.
Si la fém a un travail résistant, la force de Laplace est motrice.

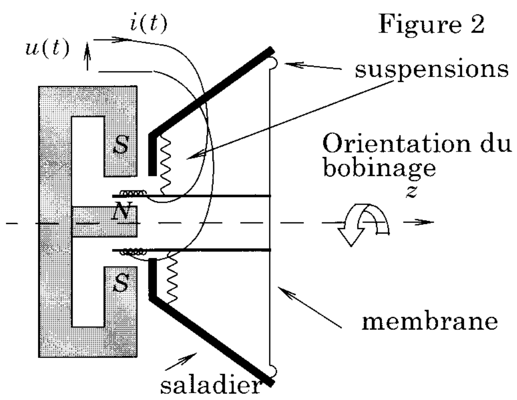
Dans tous les cas, la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique est parfaite : son rendement vaut 1.

6. Application : haut-parleur électrodynamique:

6.1.Modélisation :

L'équipage mobile de masse m est constitué d'un solénoïde de longueur totale l placé dans un champ $\vec{B}$. radial et stationnaire, et solidaire d'une membrane.
Il est soumis :

- à son poids ;
- à une réaction du support normale au déplacement car sans frottement sec ;
- à une force de rappel de la membrane, modélisée par $\vec{F} = -k.z.\vec{u}_z$;
- à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$; traduisant l'émission sonore ;
- à la force de Laplace $\vec{F}_L$.



6.2. Equation mécanique :

On calcule : $\vec{F}_L = ilB\vec{u}_z$
Le principe fondamental appliqué à l'équipage mobile en projection sur Oz donne :

$$\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dz}{dt} + k.z = i(t).l.B} \quad (1)$$

6.3.Equation électrique :

Du point de vue électrique, le bobinage, parcouru par un courant i(t), se comporte comme une résistance en série avec une inductance L, alimenté par une tension u(t).

La fém induite a deux contributions :

- la première due à l'autoinductance de la bobine ;
- la seconde au déplacement du bobinage dans le champ radial.

On a alors : $$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) - Bl\dot{z}} \quad (2)$$

6.4. Impédance du haut-parleur :

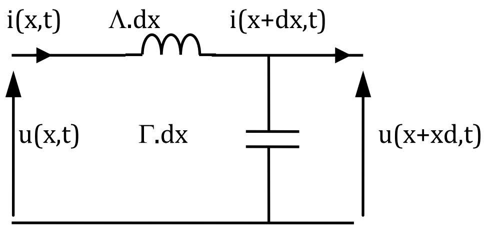
On se place en régime permanent sinusoidal de pulsation ω.

On a alors $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{B^2l^2}{Z_m}$ avec $Z_m = \lambda + j(m\omega - \frac{k}{\omega})$ impédance motionnelle.

ONDES DANS UN COAXE ; EQUATION DE D'ALEMBERT

1. Equation de propagation d'une onde de tension :

La figure suivante modélise un tronçon de longueur dx du câble coaxial, d'inductance linéiqueΛ et la capacité linéique Γ.



Dans ce modèle sans pertes on néglige la résistance linéique r du cable et la conductance linéique g entre l'âme et la gaine.

La loi des nœuds et la loi des mailles fournissent les deux équations couplées aux dérivées partielles :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

On en déduit l'équation différentielle que vérifie chacune des deux fonctions i(x,t) et u(x,t) :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}$$

Cette équation est appelée équation de d'Alembert à une dimension.
C'est une équation linéaire, qui traduit un phénomène réversible, spatialement et temporellement.
Attention à ne pas la confondre avec une équation de diffusion.

On remarque que la grandeur $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ a les dimensions d'une vitesse ; on l'appellera célérité.

2. Solutions générales de l'équation de d'Alembert :

Considérons l'équation de d'Alembert vérifiée par u(x,t).

Les solutions s'écrivent u(x, t) = f(x - ct) + g(x+ ct) , c étant la célérité des ondes (c > 0).

Remarque : il est strictement identique de noter u(x,t) = f(t-x/c) +g(t+x/c).

On dit qu'une onde s(x, t) se propage sur un axe Ox (ou selon x) si sa valeur en x à l'instant t est liée à sa valeur en x_0 à t_0 par : $x - x_0 = \pm c\,(t - t_0)$.

La solution f (x -ct) décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des x croissants au cours du temps, avec la célérité c.
La solution g (x + ct) décrit une **onde progressive** progressant dans le sens des x décroissants au cours du temps, avec la célérité c.

3. Cas de l'onde plane progressive harmonique (OPPH) :

Toute onde f(x-ct) peut être considérée comme une somme (discrète ou continue) de fonctions sinusoïdales de la variable x-ct.

Définition : une onde plane progressive harmonique est une onde de la forme :

$$f(x-ct) = A.\sin(\omega(t-x/c)+\phi) = A.\sin(\omega t-kx+\phi).$$

L'OPPH possède une double périodicité :

- temporelle, de période $\mathbf{T = 2\pi / \omega}$, ω étant sa pulsation ;
- spatiale, de période $\lambda = 2\pi / k$, appelée longueur d'onde.

On a : $\boldsymbol{\omega = k.c}$ **et** $\boldsymbol{\lambda = c.T}$.

4. Ondes planes stationnaires :

Si le milieu est infini, une onde émise en O à t = 0 se propage indéfiniment.
En général, le milieu est fini, et à ses extrémités se produisent des réflexions.

4.1. Exemple :

On considère une ligne fermée sur un court-circuit à l'extrémité x = 0, et sur laquelle arrive une onde de tension u(x, t) = f(x -ct).
En x = 0 , on doit avoir u(0, t) = 0, ce que ne peut vérifier f à tout instant.
Il existe donc une onde réfléchie, soit g (x + ct), telle que :
U(x,t) = f(x-ct)+ g(x+ct), avec
$u(0, t) = f(-ct) + g(ct) = 0 \Rightarrow f(-ct) = -g(ct)$

On a donc
$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ &= f(x - ct) - f(-(x + ct)) \\ &= f(x - ct) - f(-x - ct). \end{aligned}$$

Comment s'écrit y(x,t) si l'onde incidente progressive est plane sinusoidale ?

4.2.Définition :

Une onde stationnaire est une onde qui s'écrit : s(x, t) = f(x).g(t).
Cette onde ne se propage plus.

On montre que les seules solutions acceptables physiquement sont de la forme :

$$s(x,t) = A.\cos(kx + \phi).\cos(\omega t + \varphi).$$

On appelle **noeud de vibration** les points pour lesquels $s(x,t) = 0\ \forall t$.
On appelle **ventre de vibration** les points pour lesquels l'amplitude de vibration est maximale.

La distance entre deux noeuds de vibration consécutifs est égale à $\lambda/2$, la distance entre un ventre et un noeud consécutifs est $\lambda/4$.

Une onde stationnaire peut être considérée comme la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraires.
De même, une onde progressive peut être considérée comme la superposition de deux ondes stationnaires de même amplitude et en quadrature.
Il est donc équivalent pour un problème donné de rechercher des solutions stationnaires ou progressives.

ONDES ELECTROMAGNETIQUES PLANES DANS LE VIDE

Lorsque l'on se place à grande distance d'une source, une onde peut souvent être assimilée à une onde plane.
On se place ici dans le vide : $\rho = 0$; $\vec{j} = \vec{0}$.

1. Equations de propagation des champs .

On utilise la formule d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot} = \overrightarrow{grad}\,\text{div} - \Delta$

On déduit des équations de Maxwell dans le vide :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t} = \vec{0}\ ;\ \Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t} = \vec{0}$$

Les champs obéissent donc à une équation de d'Alembert ; ils se propagent à la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$c = 299792458\ \text{m.s}^{-1}$.

Remarque : on a toujours $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$; on peut montrer que moyennant une condition sur les potentiels – appelée jauge de Lorentz $div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ - les potentiels vérifient la même équation de propagation que les champs.

2. Onde plane :

2.1. Définition :

Définition : une onde plane est une onde qui ne dépend que d'une coordonnée cartésienne, choisie selon la direction de propagation, et du temps.

En conséquence elle a -à t donné- même valeur en tout point d'un plan (appelé plan d'onde) orthogonal à $\vec{u}$, vecteur unitaire selon la direction de propagation.

2.2. Solution générale :

Soit : $\vec{E} = E_x(x,t).\vec{u}_x + E_y(x,t).\vec{u}_y + E_z(x,t).\vec{u}_z$.

L'équation de propagation de E s'écrit projetée sur Ox :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 t} = 0$$

dont la solution est : $E_x(x,t) = f_x(x - ct) + g_x(x + ct)$;
de la même manière $E_y(x,t) = f_y(x - ct) + g_y(x + ct)$
$E_z(x,t) = f_z(x - ct) + g_z(x + ct)$.

On a donc finalement : $\vec{E} = \vec{E}_1(x - ct) + \vec{E}_2(x + ct)$

de même : $\vec{B} = \vec{B}_1(x - c\,t) + \vec{B}_2(x + c\,t)$

Dans le cas général d'une onde se propageant suivant une direction u on a : $\vec{E} = \vec{E}(\vec{u}.\vec{r} - c.t)$

3. Onde plane progressive monochromatique (OPPM).

3.1.Définition :

Les composantes d'une OPPM se propageant selon une direction $\vec{u}$ sont de la forme :

$$s(\vec{r},t) = s_0.\cos(\omega t - k\vec{u}.\vec{r} + \varphi)$$

$\vec{k} = k.\vec{u}$ est le vecteur d'onde, dirigé dans le sens de la propagation.

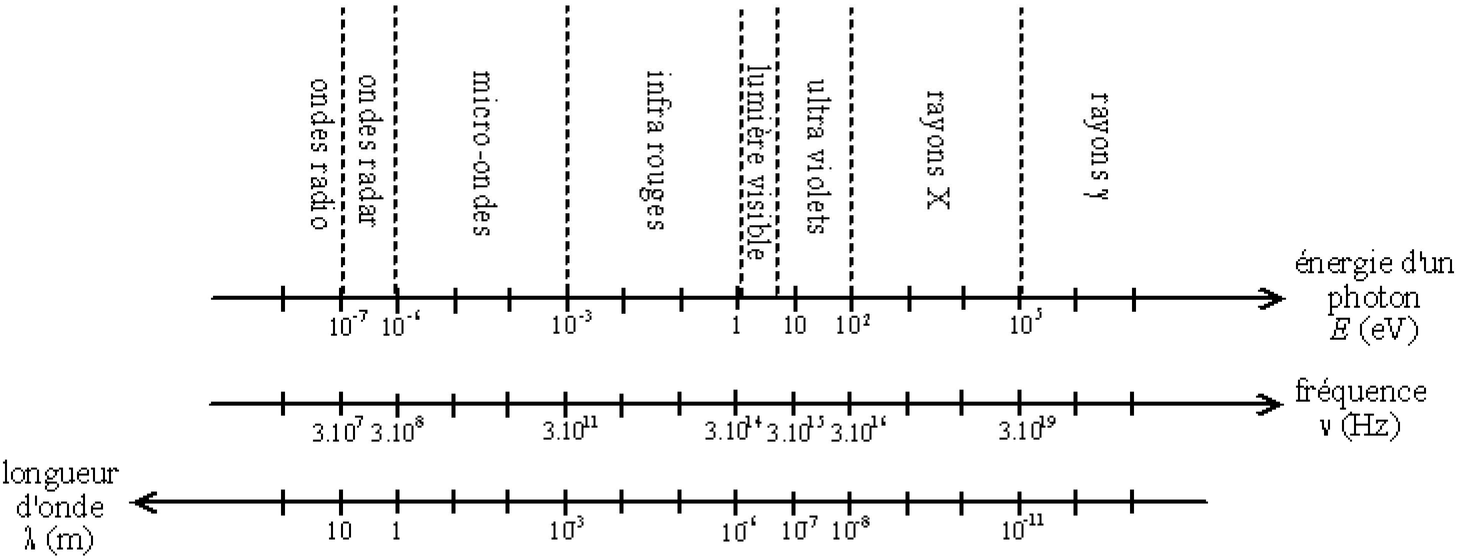
L'onde possède une double périodicité :
temporelle de période T = $2\pi/\omega$;
spatiale de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

3.2. Relation de dispersion :

C'est la relation liant k, module du vecteur d'onde, à la pulsation ω (toujours positive).
Elle est imposée par l'équation de propagation.
Pour une onde plane dans le vide, on a :

$k^2 = \omega^2 / c^2$, soit $\omega = k.c$.

C'est la relation de dispersion d'une onde plane vérifiant l'équation de d'Alembert.



3.3. Représentation complexe :

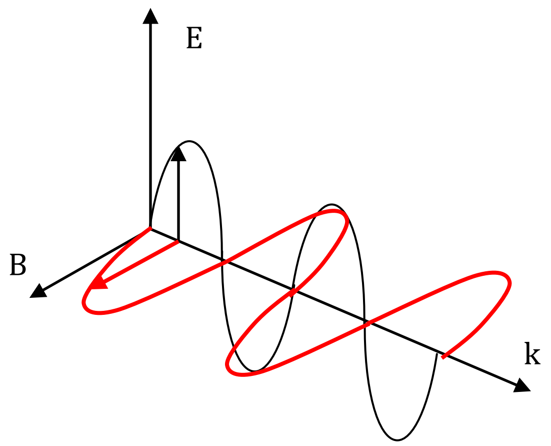
$\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$.avec $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_0.\exp j(\omega\, t - k\vec{u}.\vec{r} + \varphi)$

Le vecteur nabla s'écrit alors : $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$; de plus : $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$

3.4. Transversalité de l'onde :

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :
$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t)=0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)=0 \Leftrightarrow \vec{k}.\underline{\vec{E}}=0 \leftrightarrow \vec{k}.\vec{E}=0$; idem pour le champ $\vec{B}$.

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation ; l'onde est **transverse**.



$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}(\vec{r},t)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{B}=\dfrac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}$

Les normes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient : E = cB

3.5. Energie :

Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi}=\varepsilon_0 cE^2\vec{u}_x=\dfrac{1}{\mu_0}cB^2\vec{u}_x$

On définit un vecteur de Poynting complexe par : $\underline{\vec{\Pi}}=\dfrac{1}{\mu_0}\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*$ où $\underline{\vec{B}}^*$ est le conjugué de $\underline{\vec{B}}$.

On a alors : $<\vec{\Pi}>=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{\Pi}})$ où $<\vec{\Pi}>$ est la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$.

Densité volumique d'énergie : $u=\dfrac{dE}{d\tau}=\varepsilon_0 E^2=\dfrac{1}{\mu_0}B^2$

L'énergie est répartie également entre énergie magnétique et énergie électrique .

3.6.Vitesse de propagation de l'énergie :

L'énergie moyenne qui traverse une surface dS perpendiculaire à la direction de propagation pendant dt est égale à l'énergie moyenne contenue dans un volume $dS.V_e.dt$, où V_e est la vitesse de propagation de l'énergie, soit :
$P.dt = <\Pi>.dS.dt = <u>.dS.V_e.dt$
On en déduit : $V_e = c$

Dans le vide, l'énergie se propage à la célérité c.

3.7. Vitesse de phase :

Déf : la vitesse de phase est la vitesse de propagation des plans d'onde : $v_\varphi = \omega/k$.

En effet, soit un plan d'onde, caractérisé par une phase $\varphi = \omega t - kx$.
Si l'on suit ce plan d'onde dans son déplacement, on aura φ = cte, soit $\omega.dt - k.dx = 0$.

Pour une OPPM dans le vide : $v_\varphi = c_0$.

4. Description corpusculaire du champ électromagnétique : le photon :

Le photon est une particule de masse nulle, d'énergie $E = h.\nu$, ou h est la constante de Planck :
$h \approx 6{,}62.10^{-34}$ J.s et ν la fréquence de l'onde associée.

Sa quantité de mouvement est $\vec{p}=\dfrac{h}{2\pi}\vec{k}=\hbar.\vec{k}$.

5. Polarisation des OPPM.

Par un changement d'origine des temps, on peut écrire :

$E_y = E_{oy}.\cos[\omega t - kx]$
$E_z = E_{0z}.\cos[\omega t - kx + \varphi]$.

5.1.Définition :

Une onde est dite polarisée si l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit dans un plan $x = x_0$ au cours du temps une courbe fermée déterminée.

5.2. Cas général : polarisation elliptique :

On montre par élimination de t que la trajectoire du point de coordonnées réduites $Y = E_y/E_{0y}$; $Z = E_z/E_{0z}$ a pour équation :

$$Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

La polarisation est dite elliptique.

Sens de parcours de l'ellipse :

On se place dans le plan x = 0 ; à t = 0 Ey est maximal ; on calcule $\left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} = -\omega E_{0z}\sin\varphi$.

Si $0 < \varphi < \pi$, E_z décroit ; l'ellipse est parcourue dans le sens horaire.

Lorsqu'on regarde arriver l'onde, celle-ci est dite **elliptique droite** si l'ellipse est décrite dans le sens horaire à x fixé ; on a alors $0 < \varphi < \pi$: elle est dite **elliptique gauche** dans le cas contraire : on a alors $\pi < \varphi < 2\pi$.

Remarque : le sens de rotation change de sens si l'on regarde à t fixé en fonction de x .

5.3. Cas particuliers :

Polarisation rectiligne :
L'onde est polarisée rectilignement si E décrit une droite, càd si E_y / E_z = cte.
Cela n'est possible que si $\varphi = 0\ [\pi]$.

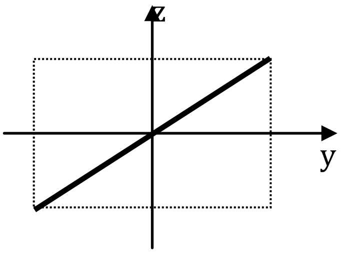
Polarisation circulaire.
L'ellipse est un cercle si $E_{0y} = E_{oz}$ et $\varphi = \pm \pi/2$.

Remarque 2 : toute polarisation elliptique peut se décomposer en deux polarisations rectilignes.

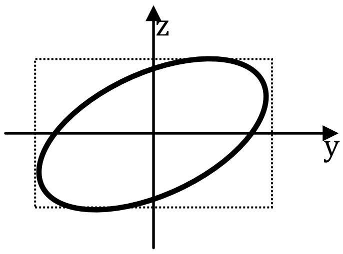
Exercice : montrer qu'une onde polarisée rectiligne se décompose en deux ondes polarisées circulairement et de sens contraires.

5.4. Analyse expérimentale d'un état de polarisation :

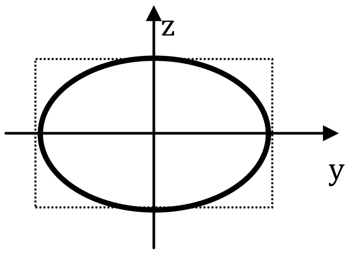
On utilise le plus souvent un polariseur dichroïque : c'est une lame d'épaisseur négligeable possédant une direction u privilégiée, telle que la lame soit transparente pour E parallèle à u et absorbante pour E perpendiculaire à u.
Un polariseur dichroique projette donc le champ sur sa direction de polarisation u.
Le polariseur permet de distinguer les différents types de lumière polarisée (cf TP-Cours).



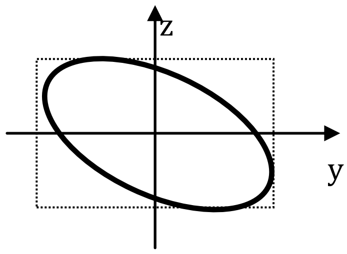
φ = 0



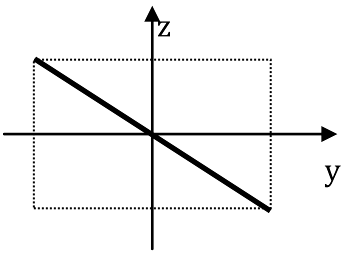
0 < φ < π/2



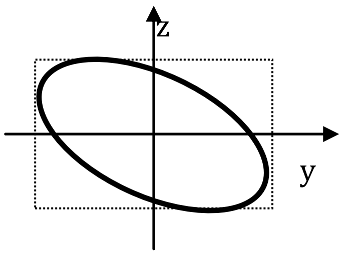
φ = π/2



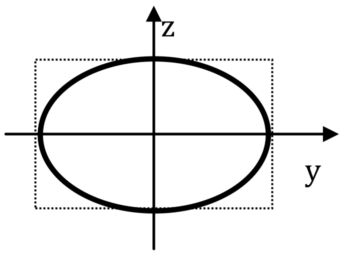
π/2 < φ < π



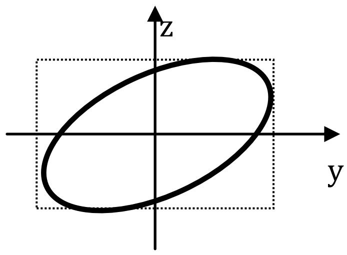
φ = π



π < φ < 3π/2



φ = 3π/2



3π/2 < φ < 2π

RAYONNEMENT DIPOLAIRE ELECTRIQUE

Le rayonnement dipolaire électrique est le processus de rayonnement le plus important, par exemple dans les atomes (lampes spectrales) ou les antennes rectilignes.

1. Modelisation :

On considère une charge fixe q > 0 placée en O et une charge -q animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation :

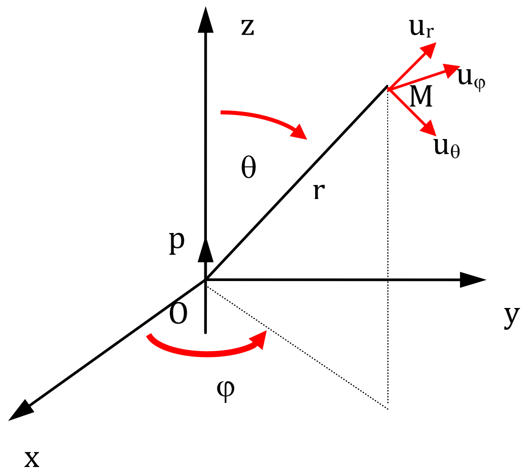
$$z(t) = a.\cos(\omega t)$$

Le moment dipolaire est donc :

$$\vec{p}(t) = -q.a.\cos(\omega t).\vec{u}_z$$

soit en notation complexe :

$\vec{p}(t) = -q.a.\exp(j\omega t).\vec{u}_z$ avec $p_0 = -\ q.a$



Le champ est calculé à grande distance soit :

r >> a.

Les charges sont animées de mouvements non relativistes, soit

$$v_{max} = a.\omega << c \Leftrightarrow a << \lambda$$

où λ est la longueur d'onde associée à la pulsation ω dans le vide.

Remarque : on utilisera par la suite les coordonnées cartésiennes de vecteurs unitaires u_x, u_y et u_z , ainsi que les coordonnées sphériques r, θ et φ associées aux vecteurs de base u_r , u_θ et u_φ.

2. Champ de rayonnement :

On appelle zone de rayonnement la zone dans laquelle r >> λ ; elle correspond aux cas usuels rencontrés, exemple : si le modèle décrit une antenne radio (λ ≈ m) on a couramment r ≈ km.
Le champ dans la zone de rayonnement est appelé champ de rayonnement ; sa structure est celle d'une onde plane.

On a dans cette zone :

$$\vec{E} = -\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\omega^2}{c^2}\sin\theta\ \exp(j\omega(t - r / c))\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{p_0\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{rc}\sin\theta\ \exp(j\omega(t - r / c))\,\vec{u}_\varphi$$

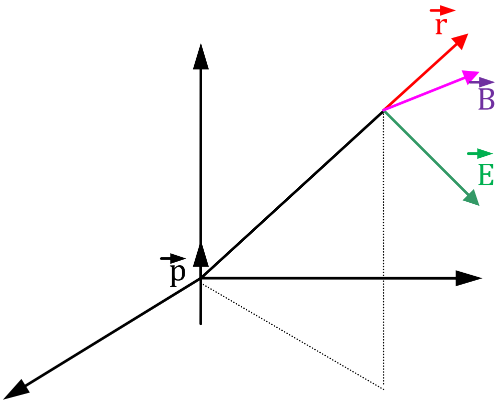
soit en notations réelles , et en utilisant $\mu_0 = 1 / \varepsilon_0 c^2$ dans l'expression de **B** :

$$\vec{E} = -\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega(t - r/c))\,\vec{u}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r}\frac{d^2p(t-r/c)}{dt^2}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{rc^3}\sin\theta\cos(\omega(t-r/c))\,\vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\sin\theta}{r}\frac{d^2p(t-r/c)}{dt^2}\vec{u}_\varphi$$

On remarque que **B** et **E** sont orthogonaux et que $E / B = c$, ce qui se traduit par :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{u}}_r \wedge \vec{\mathbf{E}}$$



Conclusions :

* Le champ a <u>localement</u> une structure d'onde plane progressive se propageant selon u_r, polarisée rectilignement selon u_θ.

* Le champ est anisotrope (terme en $\sin\theta$) : il est maximal dans la direction $\theta = \pi/2$, càd dans le plan perpendiculaire à la direction de vibration du dipôle. On dit que l'émission est directive.

* Les champs décroissent en $1/r$ donc moins vite que le champ du dipôle.

Remarque : la zone pour laquelle $a << r << \lambda$ est la zone statique ; dans cette zone $r/c << T$: la durée de propagation est négligeable devant la période, et les charges se déplacent peu devant r et λ. Le dipole est quasiement un dipole électrostatique.
La zone pour laquelle $r \approx \lambda$ est la zone intermédiaire ; aucune approximation n'est possible.

3. Puissance rayonnee.

3.1. Puissance moyenne rayonnée :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}_r$$

La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r centrée sur le dipôle est :

$$P = \iint \langle\vec{R}\rangle d\vec{S}$$

On calcule $\langle\vec{R}\rangle = \dfrac{p_0{}^2\omega^4\sin^2\theta}{32\pi^2 c^3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

et $d\vec{S} = r^2\sin\theta d\theta d\varphi\vec{u}_r$

On a donc $P = \dfrac{p_0{}^2\omega^4}{32\pi^2 c^3\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0{}^2\omega^4}{3c^3}$

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0{}^2\omega^4}{3c^3}$$

3.2. Rayonnement d'accélération :

L'accélération de la charge oscillante est $\ddot{r} = -a.\omega^2.\cos(\omega t)$,

soit en valeur moyenne : $\langle \ddot{r}^2 \rangle = \frac{1}{2}.a^2.\omega^4$

La puissance s'écrit donc : $P = \frac{2}{2}.\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3} q^2 \langle \ddot{r}^2 \rangle$; c'est la formule de Larmor.

Cette formule se généralise à toute particule chargée animée d'un mouvement accéléré non relativiste
.
Mais plus généralement toute particule chargée animée d'un mouvement accéléré rayonne de l'énergie ; c'est le **rayonnement d'accélération.**

Les principales manifestations en sont :
* le rayonnement synchrotron,
* le *rayonnement de freinage* ou brehmstrahlung, lorsqu'un faisceau de particules est décéléré par choc sur une cible (on produit de cette manière les rayons X),
* la durée de vie des niveaux d'énergie atomiques,
* le *rayonnement thermique*, du au mouvement des particules soumises à l'agitation thermique.

4. Diffusion de la lumière : modèle de l'électron élastiquement lié :

Quelle est l'interaction entre un champ électromagnétique et un milieu traversé par ce champ ?
On constate que les atomes excités se comportent comme des dipoles, qui vont réémettre une onde dite **diffusée**.

4.1. Modélisation :

On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié.

a) Chaque électron est traité indépendamment.
b) Il est soumis à :
   - une force de rappel élastique $-m\omega_0{}^2\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le déplacement par rapport à la position d'équilibre, cette force traduisant le rappel du noyau ;
   - une force de frottement $-m\Gamma\vec{v}$ traduisant l'amortissement ;
   - la force de Lorentz du au champ de rayonnement, qu'on assimilera à une onde plane monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement, et dont on néglige la composante magnétique.

4.2. Moment dipolaire électrique de l'électron :

Le principe fondamental appliqué à l'électron s'écrit :

$$m\frac{\overrightarrow{d^2r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\Gamma\frac{d\vec{r}}{dt} - e\overrightarrow{E_0}.\cos(\omega t)$$

L'excitation étant sinusoidale de pulsation ω, et le système linéaire, la réponse sera également sinusoidale de même pulsation : on peut donc utiliser la notation complexe.

On obtient : $$\vec{r} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma}\vec{E}_0$$

Le moment dipolaire qui en résulte vaut : $$\vec{p} = -e.\vec{r} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma}\vec{E}_0$$

La diffusion Rayleigh correspond au cas où $\omega_0 >> \omega$; c'est le cas de la diffusion de la lumière solaire.

En effet, pour une molécule d'ozone de la haute atmosphère dans le champ émis par le Soleil :
$\omega_0 \approx 10^{17}$ rad.s^{-1} (UV) ; $\Gamma \approx 10^8$ rad.s^{-1} ; $\omega \approx 10^{15}$ rad.s^{-1} (visible) donc $\omega_0^2 >> \omega^2$, $\omega\Gamma$.
De plus $\lambda \approx 5.10^{-7}$ m >> r : l'électron voit des champs uniformes au cours de son déplacement.

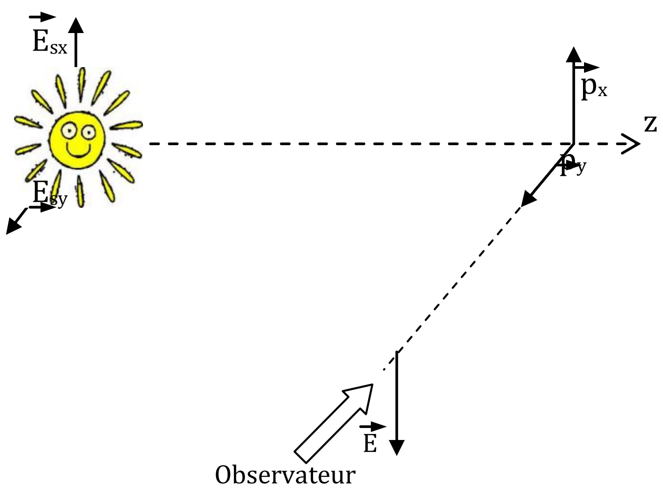
$$\vec{p} \approx \frac{e^2/m}{\omega_0^2}\vec{E}_0$$

4.3. Puissance diffusée :

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^4\omega^4}{3m^2c^3\omega_0^4}E_0^2.$$

On constate que les pulsations les plus grandes (bleues) sont plus diffusées que les plus faibles (rouge) ; ainsi la lumière diffusée apparaît bleue, tandis que la lumière transmise apparaît rouge.

La lumière observée lorsqu'on regarde le ciel est polarisée (l'œil de l'observateur est sensible au champ E).



5. Complément : calcul des champs (hors-programme) :

5.1.Potentiels :

Les solutions exactes des équations de propagation des potentiels constituent les potentiels retardés ; cela signifie que le potentiel en M à t est du aux charges et courants en P à t- r/c.

Pour une charge q immobile en 0 et une charge –q en P d'extension dτ en mouvement sinusoidal d'équation z(t) = a.cos(ωt) , on peut écrire approximativement :

$$\vec{j}.d\tau = \rho.v(t).\vec{u}_z.d\tau = -q.v(t).\overrightarrow{u_z} = \frac{d}{dt}(-q.z(t).\vec{u}_z) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

L'expression du potentiel vecteur est (solution dite « retardée ») :

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(t-r/c).d\tau}{r} \quad \text{où } r \approx \|O\vec{M}\| \text{ et } v << c$$

$$\text{d'où } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\vec{u}_z$$

$$\text{V se calcule à partir de la jauge de Lorentz : } \operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\text{soit en complexes : } \operatorname{div}\underline{\vec{A}} + j\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{V} = 0$$

$$\text{et utilise la formule d'analyse vectorielle : } \operatorname{div}(A\vec{u}_z) = \vec{u}_z.\vec{\nabla}A + A.\operatorname{div}\vec{u}_z$$

$$\text{soit ici } \operatorname{div}(\underline{A}\vec{u}_z) = \vec{u}_z.(\frac{\partial \underline{A}}{\partial r}\vec{u}_r)$$

Le calcul fournit :

$$\underline{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0\cos\theta}{r}(\frac{1}{r} + j\frac{\omega}{c})\exp(j\omega(t-r/c))$$

2.2.Champs.

$$\underline{\vec{B}} = \vec{rot}\,\underline{\vec{A}} = \vec{rot}(\underline{A}\vec{u}_z) = \underline{A}.\vec{rot}(\vec{u}_z) + \vec{grad}\,\underline{A} \wedge \vec{u}_z = (\frac{\partial \underline{A}}{\partial r}\vec{u}_r) \wedge \vec{u}_z$$

Le calcul donne :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_0\omega}{r}\sin\theta\left(\frac{j}{r} - \frac{\omega}{c}\right)\exp(j\omega(t-r/c))\vec{u}_\varphi$$

$$\underline{\vec{E}} = -\vec{grad}\underline{V} - \frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{V}}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{V}}{\partial \theta}\vec{u}_\theta - \frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial t}$$

Le calcul donne :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(j\omega(t-r/c))\left(2\cos\theta.(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc})\vec{u}_r + \sin\theta(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{rc} - \frac{\omega^2}{c^2})\vec{u}_\theta\right)$$

Dans la zone de rayonnement, on ne garde dans les expressions de **E** et **B** que les termes prépondérants.