ONDES ACOUSTIQUES DANS LES FLUIDES

6.1.2. Ondes acoustiques dans les fluides	
Approximation acoustique. Équation de d'Alembert pour la surpression acoustique.	Classer les ondes acoustiques par domaines fréquentiels. Valider l'approximation acoustique. Établir, par une approche eulérienne, l'équation de propagation de la surpression acoustique dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser l'opérateur laplacien pour généraliser l'équation d'onde.
Célérité des ondes acoustiques.	Exprimer la célérité des ondes acoustiques en fonction de la température pour un gaz parfait.
Ondes planes progressives harmoniques : caractère longitudinal, impédance acoustique.	Exploiter la notion d'impédance acoustique pour faire le lien entre les champs de surpression et de vitesse d'une onde plane progressive harmonique. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
Densité volumique d'énergie acoustique, vecteur densité de courant énergétique. Intensité sonore. Niveau d'intensité sonore.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.
Ondes acoustiques sphériques harmoniques.	Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en 1/r de l'amplitude.

1. Equation de propagation .

1.1. Modélisation :

On considère un fluide dont l'état d'équilibre correspond à :

$$P(\vec{r},t) = P_0,\ T(\vec{r},t) = T_0,\ \rho(\vec{r},t) = \rho_0 \text{ et } \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0}.$$

Le passage d'une onde acoustique provoque des variations de ces grandeurs :

$$P(\vec{r},t) = P_0 + p(\vec{r},t)\ ;\ T(\vec{r},t) = T_0 + \theta(\vec{r},t)\ ;\ \rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \mu(\vec{r},t) \text{ et } \vec{v}(\vec{r},t).$$

On fait les hypothèses suivantes :

- On néglige le poids devant les forces de pression ;
- L'écoulement est supposé parfait et adiabatique ; il sera donc isentropique.
- le déplacement ξ d'une tranche de fluide par rapport à l'équilibre est petit, ainsi que la vitesse $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$;
- les variations sont petites : $P = P_0 + p$ avec $p << P_0$; p est la **surpression acoustique** ; $\rho = \rho_0 + \mu$ avec $\mu << \rho_0$; $v << c$ (célérité des ondes acoustiques).

On se place dans **l'approximation acoustique** :

* v, p et μ sont des perturbations par rapport à l'état d'équilibre ; on les assimilera, ainsi que leurs dérivées, à des infiniment petits dont on ne conservera dans les équations que le premier ordre ;
* leurs valeurs moyennes temporelles sont nulles .

Ordres de grandeur : on a couramment $p/P_0 = \mu/\rho_0 = 10^{-3}$.

1.2. Equations générales de l'acoustique ; linéarisations et projections :

On utilise une onde plane, dépendant d'une coordonnée x et du temps t :

$$p = p(x,t)$$
$$\vec{v} = \vec{v}(x,t)$$

Equation d'Euler :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}P$$

En projection sur Ox :

$$\boldsymbol{\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}}$$

Remarque : $\|\vec{v}.\overrightarrow{grad}\| \approx \frac{v}{\lambda}$; $\frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{1}{T}$, donc :

$$\|\vec{v}.\overrightarrow{grad}\| \approx \frac{v}{\lambda} ; \frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow v \ll c$$

Equation de conservation de la masse :

$$div(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho_0 div(\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$$

Définition de χ_S (coefficient de compressibilité isentropique) :

$$\boldsymbol{\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \Rightarrow \partial\rho = \rho_0.\chi_S.\partial P}$$

1.3. Equation de propagation pour la surpression :

L'équation s'écrit à une dimension :

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}}$$

Elle se généralise à trois dimensions sous la forme :

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \,\Delta p(\vec{r},t)}$$

Equation de d'Alembert tridimensionnelle

Il est facile de montrer que ρ vérifie la même équation, moins facile de montrer que $\vec{v}$ la vérifie, mais c'est aussi le cas ; nous l'admettrons.

1.4. Solutions particulières : OPPHH

Pour une onde plane progressive harmonique homogène (OPPHH) se propageant selon une direction $\vec{u}$:

$$p(x,t) = p_0.\cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}) \text{ avec } \vec{k} = k.\vec{u}$$

On adopte alors la notation complexe :

$$\underline{p}(x,t) = p_0.\exp j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})$$

1.5. Caractère longitudinal de l'onde acoustique :

Pour une OPPHH se propageant selon Ox , l'équation d'Euler linéarisée donne en notation complexe :

$$\rho_0 j\omega\vec{v} = -\overrightarrow{grad}p = -\frac{\partial P}{\partial x}.\overrightarrow{u_x}$$

Le vecteur $\vec{v}$ est donc parallèle à la direction de propagation : l'onde est **longitudinale.**

2. Célérité des ondes acoustiques :

2.1. Gaz :

Pour un gaz parfait de masse molaire M, de coefficient γ à la température T, on montre que :

$$\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0} \text{ ; } \chi_S = 1/\gamma P_0$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}}$$

Remarque : attention dans les An à mettre M en unités SI : $kg.mol^{-1}$

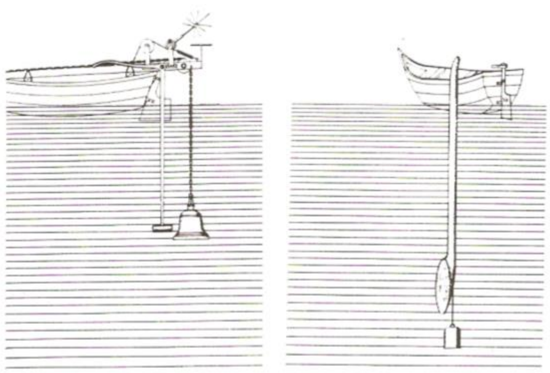
AN : Air à T = 300 K : c = 347 $m.s^{-1}$.

2.2. Liquides :

Exemple : eau $\chi_S = 5.10^{-10}$ Pa^{-1} ; $\rho_0 = 10^3$ $kg.m^{-3}$ d'où c = 1400 $m.s^{-1}$.

2.3. Mesure de la célérité du son :

La mesure peut se faire grâce à une impulsion par mesure de temps de vol (figure).



Expérience sur la transmission du son dans l'eau (1827). Les deux bateaux sont ancrés le long des deux rives du Léman. Quand le marteau frappe la cloche (gauche), une lumière est allumée sur l'embarcation. De l'autre côté du lac, des observateurs (droite) mesurent le temps écoulé entre le signal lumineux et l'audition du son.

Au labo, on la mesure dans l'air grâce à un couple émetteur récepteur d'ultrasons.

On considère un émetteur E placé en x=0 et relié à un générateur basse fréquence émettant un signal de fréquence f connue ; le signal émis s'écrit :

$$e(t) = E.\cos(\omega t).$$

Le signal reçu par un récepteur placé à l'abcisse x s'écrit :

$$s(t) = S.\cos(\omega t-kx).$$

On observe les signaux e(t) et s(t) à l'oscilloscope ; ils sont en phase si :

$$k.x = 2n.\pi \text{ avec } n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x = n.\lambda$$

On mesure donc la distance entre deux (ou plus) coincidences de phase successives pour en déduire λ, puis $c = \lambda.f$.

3. Relation entre p et v : impédance acoustique.

Définition : l'impédance acoustique d'une onde plane est :

$$\mathbf{Z = p / v}$$

Considérons une onde progressive plane monochromatique dont la surpression s'écrit :

$$p(x,t) = p_0.\sin(\omega t - k.x + \varphi).$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit ici $\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} = -k.p_0.\cos(\omega t - k.x + \varphi)$.

On en déduit $v(x,t) = \dfrac{k.p_0}{\rho_0 \omega}.\sin(\omega t - k.x + \varphi) = \dfrac{p_0}{\rho_0 c}.\sin(\omega t - k.x + \varphi)$.

On a donc pour une onde progressive suivant les x croissants :

$$\mathbf{Z_+ = \rho_0 c}$$

Pour une onde progressive suivant les x décroissants, on a de même :

$$\mathbf{Z_- = -\rho_0 c}$$

L'**impédance acoustique d'un milieu** est l'impédance d'une onde progressive se déplaçant selon les x croissants (c'est une grandeur positive) :

$$\mathbf{Z = \rho_0 c}$$

4. Ondes stationnaires :

4.1. Gammes d'ondes acoustiques :

Les fréquences audibles vont de 16 à 15000 Hz ; en-deça ce sont les infrasons, au-dela les ultrasons.

4.2 Formes de la vitesse vibratoire et de la surpression :

Soit :

$$v(x,t) = v_0.\cos(\omega t + \varphi).\cos(kx+\varphi')$$

On calcule

$$p(x,t) = \rho_0 c.v_0.\sin(\omega t + \varphi).\sin(kx+\varphi')$$

p(x,t) et v(x,t) sont en quadrature (déphasage de $\pi/2$) spatiale et temporelle.

4.3.Conditions aux limites dans un tuyau :

A une extrémité ouverte : p(t) = 0 car $P=P_0$ à l'air libre.

A une extrémité fermée : v (t) = 0.

4.4. Résonateur symétrique :

Un résonateur de longueur L dont les conditions aux extrémités sont les mêmes est appelé résonateur symétrique. Les pulsations propres y sont données par :

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L} \quad \text{et} \quad L = n\frac{\lambda}{2}$$

4.5. Résonateur disymétrique :

Un résonateur de longueur L dont les conditions aux extrémités sont différentes est appelé résonateur disymétrique. Les pulsations propres y sont données par :

$$w_n = (n - \frac{1}{2})\frac{pc}{L} \quad et \quad L = (2n - 1)\frac{l}{4}$$

5. Energie d'une onde acoustique :

5.1. Densité volumique d'énergie sonore :

Définition : énergie cinétique volumique ($J.m^{-3}$) :

$$e_c = \frac{1}{2}.\rho_0 v^2$$

Définition énergie potentielle volumique ($J.m^{-3}$):

$$e_p = \frac{1}{2}.\chi_S p^2$$

L'énergie volumique totale est donc : $\mathbf{e = e_C + e_P}$

Propriétés : pour une onde progressive $e_C = e_P$; e vérifie l'équation de propagation.

5.2.Vecteur densité surfacique de puissance :

Définition : le vecteur densité surfacique de puissance est :

$$\vec{\pi} = p.\vec{v} \ \text{ en W.m}^{-2}$$

La puissance acoustique fluant à travers une surface S s'exprime par :

$$P = \iint \vec{\pi}.d\vec{S}$$

La conservation de l'énergie s'écrit sous forme locale :

$$div(\vec{\pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

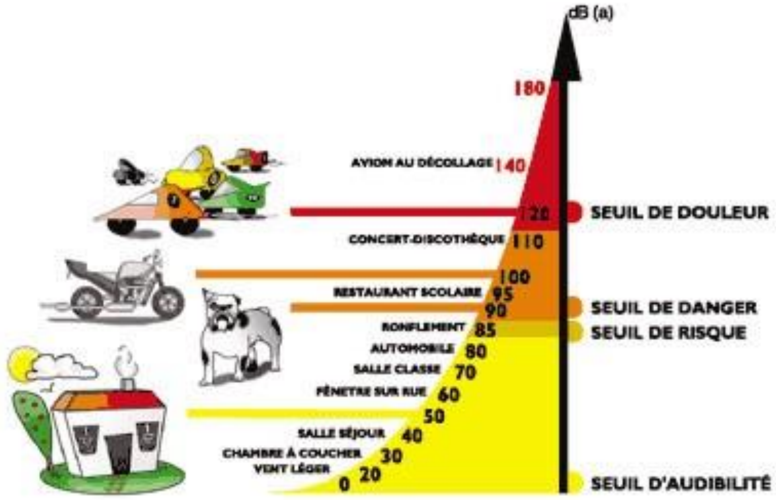
5.3. Intensité acoustique :

Définition : l'intensité acoustique est :

$$I = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle_T$$

Définition : le niveau sonore est :

$$N = 10\log (I / I_0) \text{ avec } I_0 = 10^{-12} \ W.m^{-2}.$$



Echelle du bruit

6. Onde acoustique sphérique :

Considérons une source S quasi-ponctuelle émettant une onde acoustique de manière isotrope avec une puissance P : l'onde acoustique émise est dite **sphérique.**

On a par symétrie en coordonnées sphériques :

$$p = p(r,t)$$
$$\vec{v} = v(r,t).\overrightarrow{u_r}$$

6.1. Forme de la surpression :

En coordonnées sphériques, pour p=p(r,t), le laplacien scalaire s'écrit :

$$\Delta p(r,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2}$$

On déduit de l'équation de d'Alembert qu'une solution harmonique s'écrit :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - k.r + \varphi\right)$$

6.2. Forme de la vitesse :

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}.\overrightarrow{u_r}$$

On calcule :

$$\vec{v} = \left(\frac{A}{\rho_0 r^2\omega}\sin(\omega t - k.r + \varphi) + \frac{A}{\rho_0 rc}\cos\left(\omega t - k.r + \varphi\right)\right)\overrightarrow{u_r}$$

Le second terme est prépondérant dès que :

$$r >> \lambda$$

On est alors dans l'approximation de **champ lointain**.

6.3. Puissance moyenne rayonnée :

Le milieu étant supposé non-absorbant, la puissance moyenne fluant à travers une sphère de rayon r centrée sur S est :

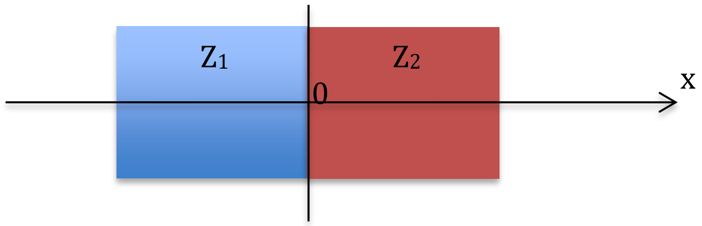
$$P = \langle \iint_{Sphère} p(r,t).\vec{v}(r,t).d\vec{S} \rangle_T = \langle p(r,t).v(r,t) \rangle.4.\pi.r^2 = cte$$

L'intensité acoustique décroit alors en $1/r^2$.

7. Réflexion et transmission d'une OPPHH acoustique :

8.1. Modélisation :

On considère une onde se propageant dans un tube de section S constante.
L'interface x = 0 sépare deux milieux d'impédances acoustiques Z_1 et Z_2
La vitesse de l'onde incidente est :



$$v_i(x, t) = v_0.\cos(\omega t - k_1 x)$$

La surpression de l'onde incidente s'écrit :

$$p_i(x, t) = Z_1.v_0.\cos(\omega t - k_1 x)$$

8.2. Formes générales des ondes réfléchies et transmises :

On constate expérimentalement l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde transmise.

On utilise pour caractériser ces ondes réfléchie et transmise des coefficients de réflexion et transmission, à priori complexes :

Définition : le coefficient de réflexion en vitesse à l'abscisse x=0 est :

$$r_v = \frac{v_r(0,t)}{v_i(0,t)}$$

Définition : le coefficient de transmission en vitesse à l'abscisse x=0 est :

$$t_v = \frac{v_t(0,t)}{v_i(0,t)}$$

Définition : le coefficient de réflexion en pression à l'abscisse x=0 est :

$$r_p = \frac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$$

Définition : le coefficient de transmission en pression à l'abscisse x est :

$$t_p = \frac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$$

On admet que ces ondes ont même pulsation que l'onde incidente (cela se démontre).

La vitesse de l'onde réfléchie s'écrit alors :

$$v_r(x, t) = r_v.v_0.\cos(\omega t + k_1 x)$$

La surpression de l'onde réfléchie s'écrit :

$$p_r(x, t) = -Z_1.r_v.v_0.\cos(\omega t + k_1 x)$$

La vitesse de l'onde transmise s'écrit :

$$v_t(x, t) = t_v.v_0.\cos(\omega t - k_2 x)$$

La surpression de l'onde transmise s'écrit :

$$p_t(x, t) = Z_2.t_v.v_0.\cos(\omega t - k_2 x)$$

8.3. Conditions de continuité à l'interface : coefficients de réflexion et de transmission :

Il y a continuité :

- de la pression P, et donc de la surpression p ;
- de la vitesse v.

Attention : faites bien la différence entre conservation d'une grandeur (énergie) et continuité !

La continuité de la vitesse en x = 0 s'écrit :

$$v(0^-,t) = v(0^+,t)$$
$$\Leftrightarrow v_i(0^-, t) + v_r(0^-, t) = v_t(0^+,t)$$

soit :

$$\mathbf{1 + r_v = t_v}$$

La continuité de la surpression s'écrit :

$$p(0^-,t) = p(0^+,t)$$
$$\Leftrightarrow p_i(0^-,t) + p_r(0^-,t) = p_t(0^+,t)$$

soit :

$$\mathbf{Z_1(1 + r_v)= Z_2\, t_v}$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1+Z_2}\ ;\ t_v = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}}$$

On peut aussi calculer :

$$r_p = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1+Z_2}\ ;\ t_p = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}$$

8.4. Coefficients de réflexion et de transmission en intensité :

L'intensité de l'onde incidente est :

$$I_i = \langle \| p_i \vec{v}_i \| \rangle = \langle Z_1 v_0^2 . cos^2(\omega t - k_1 x) \rangle = \frac{1}{2} Z_1 v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{Z_1}$$

L'intensité de l'onde réfléchie est :

$$I_r = \langle \| p_r \vec{v}_r \| \rangle = \langle Z_1 .(r_v v_0)^2 . cos^2(\omega t + k_1 x) \rangle = \frac{1}{2} Z_1 . r_v^2 . v_0^2$$

L'intensité de l'onde transmise est :

$$I_t = \langle \| p_t \vec{v}_t \| \rangle = \langle Z_2 .(t_v v_0)^2 . cos^2(\omega t - k_2 x) \rangle = \frac{1}{2} Z_2 . t_v^2 . v_0^2$$

Le coefficient de réflexion en intensité est donc :

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{I_r}{I_i} = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2$$

Le coefficient de transmission en intensité est :

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$$

La conservation de l'énergie impose :

$$\mathbf{R + T = 1.}$$

Lorsque $Z_1 = Z_2$, le coefficient de réflexion est nul ; on a alors réalisé une **adaptation d'impédances.**

Exemple : interface air/eau.